

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(6 μονάδες)

Α2. Τι πρέπει να ισχύει για την τιμή x_0 σε σχέση με το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f ώστε να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 ;

(5 μονάδες)

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = +\infty$ Ψ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\infty$ »

Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(1+3=4 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$, $k > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f .β. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια, τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

γ. Για $a > 0$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x}\right) = a$ δ. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ε. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \cdot \ln \left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\infty$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu 2x}{x} = 3$, να αποδείξετε ότι:

Β1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

(5 μονάδες)

Β2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) \cdot f(3x)}{x^2}$

(5 μονάδες)

Β3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + 3x)}{\eta \mu x}$

(8 μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x}$

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^3 + \beta x + 6}{x - 2} = 5$$

(7 μονάδες)

Γ2. i. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το Λ , όπου:

$$\Lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - k^x}{3^{x-1} + k^x}, \text{ όπου } k > 0, \text{ για τις διάφορες τιμές του } k$$

(12 μονάδες)

ii. Αν $\Lambda = -3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 1} + kx), \text{ όπου } k \text{ η παράμετρος του ερωτήματος (i).}$$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι: $\frac{3f(x)+2x}{f(x)+2x} < 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| < 2|x|$ για κάθε x πραγματικό και να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
(6 μονάδες)

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 5x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 2x+1}{f(x)-5x}$
(4+3=7 μονάδες)

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \eta\mu 3x}{x^2 f(x) - 4|x|^3}$
(6 μονάδες)

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(xf(x) - 5x^2) \cdot \eta\mu \frac{3}{x} \right]$
(6 μονάδες)