ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠ3 - 2627

ΘΕΜΑ Α

Α2. Πρέπει το x_0 να είναι εσω και συνωτερό σημείο διαστήματος απο το πεδίο ορισμού (η εσωτερικό σημείο).

Α3. Ψευδής. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ αλλά το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

Α4. Λάθος – Λάθος – Σωστό – Λάθος – Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν $g(x) = \dfrac{f(x)+\eta\mu 2x}{x} \Rightarrow f(x) = x\cdot g(x) - \eta\mu 2x$ $\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$

$\dfrac{f(x)}{x} = g(x) - \dfrac{\eta\mu 2x}{x}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 3 - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 1$

Β2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{\frac{y}{2}} = 2$ και ομοίως

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x} = 3$ άρα: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(2x)}{x}\cdot\dfrac{f(3x)}{x}\right) = 6.$

Β3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+3x)}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+3x)}{x^2+3x}\cdot\dfrac{x(x+3)}{\eta\mu x} = 1\cdot 3 = 3$

γιατί: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+3x)}{x^2+3x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y} = 1$

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(x+3)}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \dfrac{3}{1} = 3$

Β4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1-\sqrt{x+1}}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x(x-1)} - \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x(x-1)}\right] =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}\right) = 1\cdot(-1) - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτω $g(x)=\frac{\alpha x^3+\beta x+6}{x-2} \Rightarrow g(x)(x-1)=\alpha x^3+\beta x+6$

άρα $\lim\limits_{x\to 2} g(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}(\alpha x^3+\beta x+6) \Rightarrow 0=8\alpha+2\beta+6$

$\Rightarrow \beta=-3-4\alpha$. Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\alpha x^3+(-3-4\alpha)x+6}{x-2}=5$

Με Horner:

	α	0	$-3-4\alpha$	$+6$	$x=2$
		2α	4α	-6	
	α	2α	-3	0	

δηλ. το όριο

γράφεται: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(\alpha x^2+2\alpha x-3)}{x-2}=5 \Rightarrow 8\alpha-3=5 \Rightarrow \alpha=1$

συνεπώς $\beta=-7$.

Γ2. i. Διακρίνω περιπτώσεις.

Αν $k\in(0,3)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot 3-k^x}{\frac{3^x}{3}-k^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3-\left(\frac{k}{3}\right)^x\right)\cdot 3^x}{\left(\frac{1}{3}-\left(\frac{k}{3}\right)^x\right)\cdot 3^x}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=9$

Αν $k\in(3,+\infty)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k^x\left[3\cdot\left(\frac{3}{k}\right)^x-1\right]}{k^x\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{k}\right)^x-1\right]}=1$

Αν $k=3$: $\lim\frac{3\cdot 3^x-3^x}{\frac{1}{3}\cdot 3^x-3^x}=\frac{2\cdot 3^x}{-\frac{2}{3}\cdot 3^x}=-3$

ii) Αφού $\eta=3$ είναι $k=3$ άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-x+1}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-3x\left(\sqrt{1-\frac{1}{9x}+\frac{1}{9x^2}}+1\right)}=\frac{1}{6}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\dfrac{3f(x)+2x}{f(x)+2x} < 2 \Rightarrow \dfrac{3f(x)+2x}{f(x)+2x} - 2 < 0 \Rightarrow$

$\dfrac{f(x)-2x}{f(x)+2x} < 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow f^2(x) < 4x^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)| < 2|x|$ άρα και

$-2|x| < f(x) < 2|x|$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0} \pm 2|x| = 0$ (Κρ. Παρ) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Δ2. Όταν $x \to -\infty$, η σχέση $-2|x| < f(x) < 2|x|$ γράφεται:

$2x < f(x) < -2x \Rightarrow -3x < f(x) - 5x < -7x$ και

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = \lim\limits_{x\to-\infty} (-7x) = +\infty$ άρα Κρ Παρ/σης $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 5x) = +\infty$

Επίσης, $\left|\frac{\eta\mu 2x+1}{f(x)-5x}\right| \le \frac{2}{|f(x)-5x|} \Rightarrow$

$$-\frac{2}{|f(x)-5x|} \le \frac{\eta\mu 2x+1}{f(x)-5x} \le \frac{2}{|f(x)-5x|}$$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to-\infty} \pm\frac{2}{|f(x)-5x|} = 0$, από Κρ. Παρ. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu 2x+1}{f(x)-5x} = 0$.

Δ3. Είναι $f(x) \le |f(x)| < 2|x| \le 4|x|$ συνεπώς $f(x) - 4|x| < 0$

αν $x \to 0$, οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\eta\mu 3x}{x^2 f(x) - 4x^2|x|} \overset{:x^2}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\eta\mu 3x}{x}}{f(x)-4|x|} \overset{\frac{3}{0^-}}{=\!=} -\infty$$

Δ4. $$\lim_{x\to-\infty}\left[(xf(x)-5x^2)\cdot\eta\mu\frac{3}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[(f(x)-5x)\cdot x\cdot\eta\mu\frac{3}{x}\right]$$

και $$\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu 3y}{y} = 3$$

συνεπώς $$\lim_{x\to-\infty}\left[(f(x)-5x)\cdot x\cdot\eta\mu\frac{3}{x}\right] = (-\infty)\cdot 3 = -\infty.$$