

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $\psi=x$.

A2. Δίνεται η πρόταση: «Αν για τις συναρτήσεις f, g ορίζεται η σύνθεσή τους και η συνάρτηση $(f \circ g)$ είναι 1-1, τότε η g είναι οπωσδήποτε 1-1». Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

A3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια 1-1 συνάρτηση μπορεί να τέμνει σε δύο σημεία τον $\chi' \chi$.

β. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι συνθέσεις, ισχύει ότι: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

γ. Αν για μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει ότι $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε το M είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .

δ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A , τότε και η σύνθεσή τους έχει πεδίο ορισμού το ίδιο σύνολο A .

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνήσια φθίνουσες στο $\mathbb{R}$, τότε το γινόμενό τους είναι επίσης γνήσια φθίνουσα.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις h, g με τύπους: $h(x) = 3^{-x}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 3h(x) + g^2(x)$

(5 μονάδες)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3^{1-x} + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

B2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$.

(6 μονάδες)

B3. Αν ισχύει η σχέση: $\frac{3^\beta - 3^\alpha}{3^{\alpha+\beta}} = \frac{\beta - \alpha}{3\alpha\beta}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

(6 μονάδες)

B4. Να λύσετε την ανίσωση: $3^{-3-x^2} - 3^{1-5x} \leq \frac{1}{5x} - \frac{1}{x^2+4}$, $x \in (0, +\infty)$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5$, $x \in [4, +\infty)$

Γ1. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή, την οποία και να βρείτε.

(8 μονάδες)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

(10 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f^{-1} και $\gamma=x$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Για τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\ln(f(1) - 1) + 1 = \frac{1}{f(1) - 1} \quad \text{και} \quad e^{f(2)-1} = 1 - f(2)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα.

(10 μονάδες)

Δίνεται επιπλέον ότι $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Δ2. Έστω μια συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι: $g(f(x)) = -\sqrt{e^x} - \ln x + \ln 2$, $x \in (0, +\infty)$

Να βρείτε τον τύπο της $g(x)$ και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη. **(6 μονάδες)**

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{\frac{1}{f(x)}} - e^{\frac{1}{f(x^2)}} \leq \ln\left(\frac{f(x)}{f(x^2)}\right)$

(9 μονάδες)

Βασίλης Μπακούρος