

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πώς ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g : (4 μονάδες)
- A2.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε και η αντίστροφή της συνάρτηση είναι επίσης γνήσια αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$. (8 μονάδες)
- A3.** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι γνήσια φθίνουσες, τότε και το άθροισμά τους είναι γνήσια φθίνουσα. (3 μονάδες)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστή» ή «Λάθος»:
- α. Μια συνάρτηση 1-1 είναι και γνήσια μονότονη.
- β. Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη συνάρτηση την f .
- γ. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$.
- δ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση (f/g) έχει επίσης πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- ε. Αν η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, τότε $f(f(e)) < f(f(\pi))$ (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $f(1 + e^x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

- B1.** Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x - 1) - 2$, $x \in (1, +\infty)$ (6 μονάδες)
- B2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1} . (8 μονάδες)
- Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h(x) = -\ln x - 2$, $x > 0$.
- B3.** i. Να βρείτε την συνάρτηση g , όπου $g(x) = (f^{-1} \circ h)(x)$ (4 μονάδες)
- ii. Αν $g(x) = \frac{1}{x} + 1$, να λύσετε την εξίσωση: $g(x) = \ln x + 2$ (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις g, h με τύπους: $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ και $h(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και ισούται με την αντίστροφή της. (6 μονάδες)
- Γ2.** Να βρείτε την συνάρτηση f , όπου $f(x) = (g \circ h)(x)$ (6 μονάδες)
- Έστω ότι $f(x) = 1 + \frac{3}{\ln x - 1}$, $x \in (e, +\infty)$
- Γ3.** i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1} . (8 μονάδες)
- ii. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(f^{-1}(x)) < 4$ (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x) + e^{f(x)} = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. (9 μονάδες)
- Δ2.** Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^3) \leq x$ (8 μονάδες)
- Δ3.** Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης g με τύπο: $g(x) = f(\eta\mu x) - f^{-1}(\sigma\upsilon\nu x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (8 μονάδες)

Βασίλης Μπακούρος