

ΘΕΜΑ Α

A2. Αληθής. Έστω $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$

άρα $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \stackrel{f \circ g}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$ άρα η g 1-1.

A3. Λάθος - Σωστό - Λάθος - Λάθος - Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $h(x) = 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$ άρα
 $A_h \cap A_g = (0, +\infty)$ και $f(x) = 3 \cdot 3^{-x} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \Rightarrow f(x) = 3^{1-x} + \frac{1}{x}$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 3^{1-x_1} > 3^{1-x_2}$

και $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ συνεπώς $f(x_1) > f(x_2)$ δηλ. $f \searrow$ άρα 1-1.

$f^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{5}{6} = f(\alpha) \Rightarrow f(2) = f(\alpha) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$

B3. $\frac{3^b - 3^a}{3^{a+b}} = \frac{b-a}{3ab} \Leftrightarrow \frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b} = \frac{1}{3a} - \frac{1}{3b} \Leftrightarrow$
 $-3^{1-a} + 3^{1-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow 3^{1-a} + \frac{1}{a} = 3^{1-b} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow$
 $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$

B4. $3^{-x^2} - 3^{1-5x} \leq \frac{1}{5x} - \frac{1}{x^2+4} \Leftrightarrow$
 $3^{1-(x^2+4)} + \frac{1}{x^2+4} \leq 3^{1-5x} + \frac{1}{5x} \Leftrightarrow f(x^2+4) \leq f(5x)$

$\stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} x^2+4 \geq 5x \Leftrightarrow x^2-5x+4 \geq 0$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ + \overline{) - } - \overline{) +} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

άρα $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ και

επειδή πρέπει και $x > 0$ τελικά:

$$x \in (0, 1] \cup [4, +\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5 = x - 4\sqrt{x} + 4 + 1 = (\sqrt{x} - 2)^2 + 1$$

$$\text{Είναι } x \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$f(x) \geq 1$, δηλ. το 1 είναι η ελάχιστη τιμή της f η οποία προκύπτει για $x=4$.

$$\Gamma 2. \text{ Έστω } x_1, x_2 \in [4, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x_1} - 2)^2 < (\sqrt{x_2} - 2)^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ άρα } f \uparrow.$$

$$\text{Έστω } y = (\sqrt{x} - 2)^2 + 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = y - 1. \text{ Ζητώ } y \geq 1, \text{ οπότε}$$

$$|\sqrt{x} - 2| = \sqrt{y-1} \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{y-1} \text{ (αφού } \sqrt{x} \geq 2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y-1} + 2 \Rightarrow$$

$$x = y + 3 + 4\sqrt{y-1} \text{ άρα } f^{-1}(x) = x + 3 + 4\sqrt{x-1}, x \in [1, +\infty)$$

$$\Gamma 3. \text{ } \downarrow \text{ } (f^{-1} \text{ είναι πάνω από την } y=x \text{ άν}$$

$$f^{-1}(x) > x \Rightarrow x + 3 + \sqrt{x-1} > x \Rightarrow 3 + \sqrt{x-1} > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in [1, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Έστω } T(x) = \ln(x-1) + 1 - \frac{1}{x-1}, x \in (1, +\infty)$$

$$\text{Με } x_1 < x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow T(x_1) < T(x_2) \text{ δηλ. } T \uparrow$$

$$\text{Ευκολώς } T(x) = 0 \Leftrightarrow T(f(1)) = T(2) \Leftrightarrow f(1) = 2$$

$$\text{Έστω } k(x) = e^{x-1} - 1 + x, \text{ η } k \uparrow \text{ και η επίστροφή}$$

$$\text{η αρχική γίνεται } k(f(2)) = 0 = k(1) \Leftrightarrow f(2) = 1.$$

Αφού $1 < 2$ και $f(1) > f(2)$ η f γνήσια φθίνουσα.

$$\Delta 2. \quad g(f(x)) = \sqrt{e^x} - \ln x + \ln 2, \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{d.p.a.}$$

$$g\left(\frac{2}{x}\right) = -e^{\frac{x}{2}} - \ln x + \ln 2 \quad y = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{y}$$

$$\text{d.p.a.} \quad g(y) = -e^{\frac{1}{y}} - \ln 2 + \ln y + \ln 2 \Rightarrow g(y) = \ln y - e^{\frac{1}{y}}$$

$$\text{GIVENUS} \quad g(x) = \ln x - e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$\text{ME } x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow e^{\frac{1}{x_1}} > e^{\frac{1}{x_2}} \Rightarrow -e^{\frac{1}{x_1}} < -e^{\frac{1}{x_2}}$$

$$\text{UAI } \ln x_1 < \ln x_2 \quad \text{GIVENUS } g(x) \nearrow \quad \text{d.p.a. 1-1.}$$

$$\Delta 3. \quad e^{\frac{1}{f(x)}} - e^{\frac{1}{f(x^2)}} \leq \ln(f(x)) - \ln(f(x^2)) \Rightarrow$$

$$\ln f(x^2) - e^{\frac{1}{f(x^2)}} \leq \ln(f(x)) - e^{\frac{1}{f(x)}} \Rightarrow$$

$$g(f(x^2)) \leq g(f(x)) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x^2) \leq f(x) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 \geq x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x(x-1) \geq 0 \\ \text{UAI } x \in (0, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$