

ΘΕΜΑ Α

42. Έστω  $x_1, x_2 \in f(\mathbb{R})$  με  $x_1 < x_2$ , άρα  $f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow$

$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$  άρα  $f^{-1}$  γν. αύξουσα.

44. Άδρας - Σωστό - Άδρας - Άδρας - Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Έστω άπέν  $f(e^x + 1) = x - 2$ , θέσω  $y = e^x + 1 \Rightarrow x = \ln(y - 1)$   
 $y > 1$ . Συνεπώς,

B1.  $f(y) = \ln(y - 1) - 2$  άρα  $f(x) = \ln(x - 1) - 2$ ,  $x \in (1, +\infty)$

B2. Με  $x_1 < x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$  άρα  $f \uparrow$  και  $1 - 1$ .

θέσω  $y = \ln(x - 1) - 2 \Rightarrow \ln(x - 1) = y + 2 \Rightarrow x = e^{y+2} + 1$

και  $x > 1 \Rightarrow e^{y+2} + 1 > 1$  που ισχύει για κάθε  $y \in \mathbb{R}$

άρα  $f^{-1}(x) = e^{x+2} + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

B3. i)  $A_{f^{-1} \circ h} = \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ h(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow A_{f^{-1} \circ h} = (0, +\infty)$

με  $(f^{-1} \circ h)(x) = f^{-1}(-\ln x - 2) = e^{-\ln x} + 1 = \frac{1}{x} + 1$ ,  $x \in (0, +\infty)$

ii) Η εξίσωση  $g(x) = \ln x + 2$  γίγνεται  $\frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$   
 $\Rightarrow \ln x - \frac{1}{x} + 1 = 0$ . Θέσω  $T(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$ ,  $x \in (0, +\infty)$

Η  $T(x)$  είναι γν. αύξουσα και  $T(1) = 0$  άρα η

μόνη  $x = 1$  είναι η μοναδική ρίζα της.

## ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \quad g(x) = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}.$$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in (1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{3}{x_1-1} > \frac{3}{x_2-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

συμπεραίνει η  $g$  να είναι 1-1.

$$\text{Θέτω } y = 1 + \frac{3}{x-1} \Rightarrow y-1 = \frac{3}{x-1} \Rightarrow x-1 = \frac{3}{y-1} \Rightarrow x = \frac{y+2}{y-1}$$

$$\text{και αφού } x > 1 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Rightarrow y > 1$$

$$\text{συμπεραίνει } g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad x \in (1, +\infty), \quad \text{όπου } g(x) = g^{-1}(x).$$

$$\Gamma 2. \quad A_{g \circ h} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \text{και} \\ \ln x > 1 \Rightarrow x > e \end{array} \right\} \quad \text{όπου } A_{g \circ h} = (e, +\infty)$$

$$\text{με } g(h(x)) = \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} = \frac{\ln x - 1 + 3}{\ln x - 1} = 1 + \frac{3}{\ln x - 1}$$

$$\Gamma 3. \quad \text{i) Έστω } x_1, x_2 \in (e, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{3}{\ln x_1 - 1} > \frac{3}{\ln x_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \text{όπου } f \text{ γνήσια φθίνουσα, συμπεραίνει 1-1.}$$

$$\text{Θέτω } y = 1 + \frac{3}{\ln x - 1} \Rightarrow y-1 = \frac{3}{\ln x - 1} \Rightarrow \ln x - 1 = \frac{3}{y-1} \Rightarrow$$

$$\ln x = \frac{y+2}{y-1} \Rightarrow x = e^{\frac{y+2}{y-1}}, \quad \text{με } y > 1 \text{ αφού } x > e$$

$$\text{συμπεραίνει } f^{-1}(x) = e^{\frac{x+2}{x-1}}, \quad x \in (1, +\infty).$$

$$\text{ii) } \ln(f^{-1}(x)) < 4 \Rightarrow e^{\frac{x+2}{x-1}} < e^4 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} < 4 \Rightarrow$$

$$\frac{x+2}{x-1} - 4 < 0 \Rightarrow \frac{6-3x}{x-1} < 0 \xrightarrow{x>1} 6-3x < 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\text{όπου } x \in (2, +\infty).$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θα δείξουμε ότι η  $f \uparrow$ .

Πρώτα, αν  $h(x) = 2x^3 + e^x$ , η  $h(x)$  είναι γνήσια αύξουσα.

$$(x_1 < x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)).$$

$$\text{Έστω } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow 2f^3(x_1) + e^{f(x_1)} < 2f^3(x_2) + e^{f(x_2)}$$

$$\Rightarrow h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \stackrel{h \uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \text{ δηλ. } f \uparrow.$$

Άρα  $f$  1-1. Θέτοντας  $y = f(x)$  η σχέση γίνεται:

$$2y^3 + e^y = x + 1 \Rightarrow x = 2y^3 + e^y - 1, \text{ συνεπώς:}$$

$$f^{-1}(x) = 2x^3 + e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Από  $f \uparrow$ ,  $f^{-1} \uparrow$  οπότε:  $f(x^3) \leq x \Rightarrow$

$$f^{-1}(f(x^3)) \leq f^{-1}(x) \Rightarrow x^3 \leq 2x^3 + e^x - 1 \Rightarrow x^3 + e^x - 1 \geq 0.$$

Έστω  $T(x) = x^3 + e^x - 1$ , συνεπώς  $T \uparrow$  και  $T(0) = 0$ , άρα

$$\text{η ανίσωση γίνεται } T(x) \geq T(0) \Rightarrow x \geq 0.$$

Δ3. Έστω  $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$  με  $x_1 < x_2 \stackrel{\text{ημ}}{\Rightarrow} \text{ημ} x_1 < \text{ημ} x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow}$

$$f(\text{ημ} x_1) < f(\text{ημ} x_2). \quad (1)$$

$$\text{Με } x_1 < x_2 \stackrel{\text{συμ}}{\Rightarrow} \text{συμ} x_1 > \text{συμ} x_2 \stackrel{f^{-1} \uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(\text{συμ} x_1) > f^{-1}(\text{συμ} x_2)$$

$$\Rightarrow -f^{-1}(\text{συμ} x_1) < -f^{-1}(\text{συμ} x_2) \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$$g(x_1) < g(x_2), \text{ συνεπώς } g \uparrow.$$