ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x) = x^{a}$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$

(8 μονάδες)

Α2. Πότε μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο της x_0 ; **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, υπάρχει τιμή ξ για την οποία ισχύει ότι $f''(\xi) = 0$, τότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο ξ». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
(1+3=4 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της
$(x_0,f(x_0))$ είναι ο παράγωγος αριθμός της f στο x_0.
β. Οι γραφικές παραστάσεις μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης φ και της αντίστροφής της φ^{-1}, έχουν άξονα συμμετρίας τον χχ΄.
γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.
δ. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x|$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.
ε. Αν για μια συνεχή και μη μηδενική συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε και
$\int_{a+1}^{a} f(t)dt < 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις g, h με τύπους: $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, με $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \sqrt{x-2}$, $x \in [2,+\infty)$

Β1. Να ορίσετε τη σύνθεση της h με την g. **(5 μονάδες)**

Έστω $f(x) = (g \circ h)(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$, $x \in [2,+\infty)$

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία, την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f. **(7 μονάδες)**
Β3. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , έστω f^{-1}. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες;
(5+2 μονάδες)
Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της συνάρτησης f^{-1}, του άξονα χ΄χ και τις ευθείες
x=-1, x=0. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=x-\ln x^3$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα.

(4 μονάδες)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 και ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$

(4+2 μονάδες)

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τον $x'x$, δίνεται από τη σχέση:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-6)$$ **(7 μονάδες)**

ii. Να αποδείξετε ότι η τιμή x_1 απέχει από το 3 λιγότερο από ότι απέχει η τιμή x_2 από το 3.

(3 μονάδες)

Γ4.Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3}{f(x)-f(3)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-3}\right)\right)$ **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία γνωρίζουμε ότι: • $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}\cdot f\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)=2$ • $f''(x)\neq 0$ • $f(2)>2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο $x_o=1$ είναι η $y=2x-2$.

(5 μονάδες)

Δ2. i. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. **(7 μονάδες)**

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **(3 μονάδες)**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln x+x-1$ **(4 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx>\dfrac{e^2-3}{2}$ **(6 μονάδες)**