ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = 1 - \frac{3}{x} = \frac{x-3}{x}$

x	0		3	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

Ελάχιστο για $x=3$

$f(3)=3(1-\ln 3)<0$

$f''(x)=\frac{3}{x^2}>0$, f κυρτή.

Γ2. Αν $x \in (0,3] \Rightarrow f(x) \in [3(1-\ln 3), +\infty)$

$x \in [3,+\infty) \Rightarrow f(x) \in [3(1-\ln 3), +\infty)$ και αφού το 0 ανήκει και στα δύο διαστήματα, υπάρχουν μοναδικά $x_1 \in (0,3)$ και $x_2 \in (3,+\infty)$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Πρόσημο της f:

x	0		x_1		3		x_2	
f		$+$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$+$

άρα $f(x)<0 \ \forall x \in (x_1, x_2)$

Γ3. $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x - 3\ln x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\ln x + 3x\right]_{x_2}^{x_1}$

(και $x_1 - 3\ln x_1 = 0 \Rightarrow \ln x_1 = \frac{x_1}{3}$ και $\ln x_2 = \frac{x_2}{3}$)

$= \frac{x_1^2}{2} - x_1^2 + 3x_1 - \frac{x_2^2}{2} + x_2^2 - 3x_2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - 3(x_2 - x_1) =$

$= \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1) - 6(x_2-x_1)}{2} = \frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2-6)}{2}$

ii. Είναι $E>0$ άρα $x_1+x_2-6>0 \Rightarrow x_2-3>3-x_1$

άρα $d(x_1,3)<d(x_2-3)$.

Γ4. $\lim_{x\to 3} \frac{3}{f(x)-f(3)} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{3}{x-3}}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}} = \lim_{x\to 3} \frac{3}{(x-3)\cdot f'(3)}$

Αν $x\to 3^-$, $x-3<0$ και $f'(3)<0$ άρα $(x-3)f'(3)>0$

ενώ αν $x\to 3^+$, $x-3>0$ και $f'(3)>0$ άρα $(x-3)f'(3)>0$

συνεπώς το όριο δίνει $(+\infty)$.

Επίσης $\left|ημ\frac{1}{x-3}\right| \le 1$ άρα

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{f(x)-f(3)} + ημ\frac{1}{x-3}\right) = +\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο δοσμένο όριο θέτω $u=e^{\frac{1}{x}}+1$ άρα $u\to 1$ όταν $x\to 0^-$,

$\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)}{u-1}=2$. Τότε, αν $h(u)=\frac{f(u)}{u-1} \Rightarrow f(u)=h(u)\cdot(u-1) \Rightarrow$

$\lim\limits_{u\to 1} f(u)=\lim\limits_{u\to 1} h(u)(u-1) \Rightarrow f(1)=0$ και $f'(1)=\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)}{u-1}=2$

άρα η εφ/νη στο $x_0=1$ είναι $y=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2$

Δ2. Η $f''(x)\neq 0$, f'' συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο.

Με ΘΜΤ για την f στο $(1,2) \to \exists\, \xi\in(1,2): f'(\xi)=f(2)-f(1)$

$\Rightarrow f'(\xi)=f(2)$

Επίσης f' συν. στο $[1,\xi]$, παρ/γη στο $(1,\xi)$ άρα (ΘΜΤ)

$\exists\, x_0\in(1,\xi): \quad f''(x_0)=\frac{f'(\xi)-2}{\xi-1}=\frac{f(2)-2}{\xi-1}>0$ άρα $f''(x)>0$

δηλ. f κυρτή.

ii) Αφού f κυρτή $f(x)\geq 2x-2$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Δ3. Έστω $g(x)=f(x)-\ln x-x+1$, $g(1)=0$.

$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}-1$, $g'(1)=0$ και $g''(x)=f''(x)+\frac{1}{x^2}>0$

άρα:

		1	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

άρα η g έχει ελάχιστο για $x=1$, $g(1)=0$ συνεπώς το 1 είναι μοναδική της ρίζα.

Δ4. Είναι $f(x)\geq 2x-2 \Rightarrow \ln x\, f(x)\geq (2x-2)\ln x \Rightarrow$

$$\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx > \int_1^e (2x-2)\ln x\,dx=\int_1^e (x^2-2x)'\ln x\,dx=$$

$$\left[(x^2-2x)\ln x\right]_1^e-\int_1^e (x-2)\,dx = e^2-2e-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^e=$$

$$=e^2-2e-\frac{e^2}{2}+2x+\frac{1}{2}-2=\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}=\frac{e^2-3}{2}$$

ΘΕΜΑ Α

Α3. Ψευδής. Η $f(x)=x^4$ έχει $f''(x)=12x^2$ που μηδενίζεται για $x=0$ αλλά η f είναι κυρτή χωρίς σημ. καμπής.

Α4. Σωστό – Λάθος – Λάθος – Λάθος – Σωστό.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. $A_{g\circ h} = \begin{cases} x\in[2,+\infty) \\ \text{και} \\ h(x)\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow A_{g\circ h}=[2,+\infty)$ και

$$g(h(x)) = \frac{x-3}{x-1}, \quad x\in[2,+\infty).$$

Β2. $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0 \ \forall\, x\in[2,+\infty)$, $f''(x) = -\dfrac{4}{(x-1)^3} < 0$, f κυρ

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ άρα η $y=1$ οριζ. ασύμπτωτη στο $+\infty$ και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Β3. Αν $x\in[2,+\infty) \Rightarrow f(x)\in[-1,1) = A_{f^{-1}}$

$$y=\frac{x-3}{x-1} \Rightarrow yx-y=x-3 \Rightarrow (y-1)x=y-3 \Rightarrow x=\frac{y-3}{y-1}$$

άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$, $x\in[-1,1)$.

Β4. $E = \displaystyle\int_{-1}^{0} |f^{-1}(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x-3}{x-1}\,dx =$

	1		3	
+		−		+

$$\int_{-1}^{0} 1-\frac{2}{x-1}\,dx = \Big[x-2\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0} = 1+2\ln 2.$$