ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ4 – 2526

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

(8 μονάδες)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

(1+2=3 μονάδες)

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη». Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(1+3=4 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση με ακρότατο στο x_0 ισχύει $f'(x_0)=0$

β. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [α, β] μπορεί να έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

γ. Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης σε σημείο καμπής της, «διαπερνά» τη γραφική της παράσταση.

δ. Μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και έχει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_0 εσωτερικό του Δ, μπορεί να έχει και σημείο καμπής στο ίδιο σημείο x_0 .

ε. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\pi}{e}\right)^x=+\infty$ **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2x^3-\alpha x^2+\beta$ για την οποία γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x=1, την τιμή f(1)=-6.

Β1. Να αποδείξετε ότι α=3 και β=-5. **(5 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης καθώς και το πλήθος των ριζών της. **(5 μονάδες)**

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο: $g(x)=\dfrac{f(x)-2x^3}{x+1}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Β3. Να βρείτε- αν υπάρχουν- τις ασύμπτωτες της συνάρτησης g. **(7 μονάδες)**

Β4. Να ελέγξετε την συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Για μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R, ισχύει η σχέση

$(e^x-1)f(x)=x,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}^*$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **(4 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα κρίσιμα σημεία της ,τη μονοτονία της και το σύνολο τιμών της.

(8 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=ημ2x-2x,\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, είναι αδύνατη. **(6 μονάδες)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $f(\ln(x+1))-f(e^x)\geq f(x)-f(x+1),$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$f(x)=\ln x+2x-\alpha$ και $g(x)=x\ln x+x^2-x(\alpha+1)$ $x\in(0,+\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα x_o. **(6 μονάδες)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο x_o την τιμή $g(x_o)=-{x_o}^2-x_o$

(7 μονάδες)

Δ3. Αν η ευθεία με εξίσωση $y=3x-3$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο x_o, να βρείτε το α και το x_o . **(5 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $xf(x)+f(x^3)<(1+x)f(x^2)$ για κάθε $x\in(0,1)$. **(7 μονάδες)**