στο $\mathbb{R}$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ συνεπώς η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ χωρίς ακρότατα και χωρίς κρίσιμα σημεία.

Γ3. Επειδή $|ημ2x|\le|2x|$ και για $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$-2x\le ημ2x\le 2x \Rightarrow ημ2x-2x\le 0$ με την ισότητα μόνο για $x=0$, ενώ $f(x)>0$, η εξίσωση $f(x)=ημ2x-2x$ είναι αδύνατη.

Γ4. Η σχέση $f(\ln(x+1))-f(e^x)\ge f(x)-f(x+1)$ ισχύει με το ίσον για $x=0$.

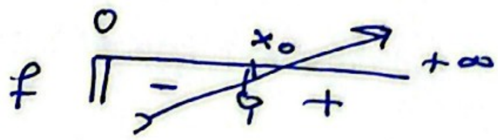
Για $x>0$, $\ln(x+1)<x \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\ln(x+1))>f(x)$

ενώ $e^x>x+1\Rightarrow f(e^x)<f(x+1)\Rightarrow -f(e^x)>-f(x+1)$ $\Big\}\ (+)$

$\Rightarrow f(\ln(x+1))-f(e^x)>f(x)-f(x+1)$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ η f είναι γνήσια αύξουσα συνεπώς έχει μοναδική ρίζα, $x_0\in(0,+\infty)$. Το πρόσημο της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:



Δ2. $g(x) = x\ln x + x^2 - x(\alpha+1)$, $g'(x) = \ln x + 1 + 2x - \alpha - 1$

άρα $g'(x) = \ln x + 2x - \alpha = f(x)$ συνεπώς έχει το ίδιο πρόσημο με την f

x	0		x_0		$+\infty$
g'	‖	$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

άρα η g έχει ελάχιστο στο x_0, $g(x_0) = x_0\ln x_0 + x_0^2 - x_0(\alpha+1)$

ενώ $f(x_0) = 0$ δηλ. $\ln x_0 = \alpha - 2x_0$ συνεπώς

$g(x_0) = x_0(\alpha - 2x_0) + x_0^2 - \alpha x_0 - x_0 = \alpha x_0 - x_0^2 - \alpha x_0 - x_0$

άρα $g(x_0) = -x_0^2 - x_0$.

Δ3. Η εφ/νη στο x_0 της C_f: $y = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0)$

συνεπώς θητάμε $f'(x_0) = 3$ και $-3x_0 = -3 \Rightarrow x_0 = 1$

και $f(1) = 0 \Rightarrow 2 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

Δ4. Αν $x \in (0,1)$, $x^3 < x^2 < x$, οπότε με 2 Θ.Μ.Τ. προκύπτουν ότι $\exists\ \xi_1 \in (x^3, x^2)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2 - x^3}$

και $\xi_2 \in (x^2, x)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2}$. Επίσης $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

άρα η f' ↘, οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Longrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2(1-x)} > \frac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)}$$

$\overset{(x,\ 1-x)\ \text{θετικά}}{\Longrightarrow}$ $f(x^2) - f(x^3) > x f(x) - x f(x^2) \Rightarrow$

$$x f(x) + f(x^3) < (1+x)\cdot f(x^2).$$