ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠ4 - 2526

Α3. Ψευδής. Για παράδειγμα, η $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & -1\le x<0 \\ x+2, & 0\le x\le 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $[-1,1]$ και έχει κατ/γη ασύμπτωτη την $x=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

Α4. Λάθος - Λάθος - Σωστό - Λάθος - Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=2x^3-\alpha x^2+\beta$, $f'(x)=6x^2-2\alpha x$ και $f'(1)=0$, $f(1)=-6$

άρα:

Β1. $6-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=3$ και $2-3+\beta=-6 \Rightarrow \beta=-5$

δηλ. $f(x)=2x^3-3x^2-5$.

Β2. $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

x		0		1	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

Βρίσκουμε σύνολο τιμών:

$x\in(-\infty,0] \Rightarrow f(x)\in(-\infty,-5]$

$x\in(0,1) \Rightarrow f(x)\in(-6,-5)$

$x\in[1,+\infty) \Rightarrow f(x)\in[-6,+\infty)$ και επειδή το 0 ανήκει μόνο στο τελευταίο διάστημα, η f έχει μοναδική ρίζα.

Β3. $g(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-5-2x^3}{x+1}=-\dfrac{3x^2+5}{x+1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^-} -\dfrac{3x^2+5}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=-\infty$ άρα

η $x=-1$ κατ/γη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}=-3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{3x^2+5}{x+1}+3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x+1}=3$

συνεπώς η $y=-3x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη.

B4. $g'(x) = -\dfrac{6x(x+1)-(3x^2+5)}{(x+1)^2} = -\dfrac{3x^2+6x-5}{(x+1)^2} = \dfrac{-3x^2-6x+5}{(x+1)^2}$

$$g''(x) = \frac{(-6x-6)(x+1)^2 - (-3x^2-6x+5)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$g''(x) = \frac{2(x+1)\left[-3(x+1)^2+3x^2+6x-5\right]}{(x+1)^4} \Rightarrow$$

$$g''(x) = \frac{-16}{(x+1)^3}$$

		-1	
g''	$+$	‖	$-$
g	$\cup$		$\cap$

χωρίς σημ. καμπής.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f συνεχής στο 0, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} \Rightarrow$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1$ συνεπώς $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Γ2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-e^x+1}{xe^x-x} \underset{DLH}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^x}{e^x+xe^x-1} = \lim \dfrac{-e^x}{2e^x+xe^x} = -\dfrac{1}{2}$

Για $x\neq 0$ $f'(x) = \dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$.

Θεωρώ την $g(x) = e^x-1-xe^x$, $x\in\mathbb{R}$, $g(0)=0$.

$g'(x) = -xe^x$

		0	
g'	$+$		$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

Η g έχει μέγιστο για $x=0$, $g(0)=0$

άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$ και $f'(0)=-\frac{1}{2}$ δηλ. $f\downarrow$