ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΠ3 (2526) (ΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **(2+2=4 μονάδες)**

Α2. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι f'(x)=0 για κάθε χ εσωτερικό του διαστήματος Δ, τότε η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ. **(7 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα [α, β] και δεν ισχύει για αυτήν το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο [α, β], τότε η f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(1+3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος».

α. Μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι δεν είναι 1-1, δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα τουλάχιστον σημείο της.

β. Μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα (α, β) και γνήσια μονότονη σε αυτό , δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

γ. Δύο συναρτήσεις f και g που έχουν ίσες παραγώγους και τέμνουν στο ίδιο σημείο τον άξονα x'x, ταυτίζονται.

δ. Μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα , είναι και συνεχής σε αυτό.

ε. Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα Δ και που η γραφική της δεν τέμνει τον χ΄χ, διατηρεί πρόσημο. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι :

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ln x}{x^2}, 0<x<1\\ 2x-1,\ x\geq 1\end{cases}$, καθώς και ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το (2,2).

Β1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x},\ \ 0<x<1\\ x^2-x,\ \ x\geq 1\end{cases}$ **(6 μονάδες)**

Β2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{1}{e},2\right)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{e(2+e)}{2e-1}$ **(10 μονάδες)**

Έστω επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο: $g(x)=\sqrt{x-1},\ x\in[1,+\infty)$.

Β3. i) Να ορίσετε την συνάρτηση h, όπου $h(x)=(f\circ g)(x)$ **(5 μονάδες)**

ii) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης h στο σημείο x_o=5. **(4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{(1-x)^3}{3}, & x\le 1 \\ \dfrac{ημ(x-1)}{x-1}-1, & x>1 \end{cases}$

Γ1. Να ελέγξετε αν για τη συνάρτηση f(x) μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα [0, π+1]. **(10 μονάδες)**

Γ2. Να δείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον x′x. **(6 μονάδες)**

Γ3. Έστω ένα σημείο Μ(α, f(α)), $a\le 0$ το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ώστε η προβολή Β του σημείου Μ στον χ′χ να απομακρύνεται από το (0,0) με ταχύτητα 2 m/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΒΟΜ τη χρονική στιγμή όπου $a(t_o)=-2\text{ m}$ **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$f(x)-\dfrac{2}{x}=f'(x)-\ln x^2$ και f(1)=e.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-2\ln x,\ x\in(0,+\infty)$. **(9 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης f σε αυτό να είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα. **(9 μονάδες)**

Δ3. Έστω Μ(x(t), y(t)) ένα σημείο που κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ την χρονική στιγμή όπου y′(t)=(e-2)x′(t), αν γνωρίζετε ότι x′(t)>0 για κάθε χρονική στιγμή t. **(7 μονάδες)**