

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$ (8 μονάδες)

A2. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση που είναι 1-1 είναι και γνήσια μονότονη». Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον χαρακτηρισμό σας. (1+3=4 μονάδες)

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει μέγιστο σε κάποιο x_0 ; (3 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

β. Η αντίστροφη μιας συνάρτησης f εφόσον ορίζεται, έχει αντίστροφη την αρχική συνάρτηση f .

γ. Η σύνθεση μιας γνήσια μονότονης συνάρτησης με τον εαυτό της, είναι πάντα γνήσια αύξουσα.

δ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση (f/g) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, τότε η σύνθεσή τους έχει επίσης πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ και $g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+2}$, $x \in [0, +\infty)$

B1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $(f-g)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)$. (3+5=8 μονάδες)

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση h με $h(x) = \ln x$, $x > 0$.

B2. Να βρείτε την συνάρτηση φ , όπου $\varphi(x) = (f \circ h)(x)$ και να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης φ . (4+6=10 μονάδες)

B3. Να ορίσετε τη συνάρτηση φ^{-1} . (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$, $x \in [0, +\infty)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (7 μονάδες)

Γ2. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (8 μονάδες)

Γ3. Αν $g(x) = \ln x$, $x > 0$, να βρείτε την συνάρτηση h , όπου h η σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει ελάχιστη τιμή την οποία και να βρείτε.

(5+3+2=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f(x) - \frac{1}{f(x)} = e^x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$ (10 μονάδες)

Δ2. Έστω η συνάρτηση h με $h(x) = \ln[f(x)]^{e^{f(x)}}$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $h(x) = x \cdot e^{e^x}$. (5 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x$, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης h σε δύο ακριβώς σημεία με μη θετικές τετμημένες. (10 μονάδες)

Βασίλης Μπακούρος