

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Μια συνάρτηση γνήσια μονότονη είναι και 1-1
2. Οι συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$ , εφόσον ορίζονται, έχουν τα κοινά τους σημεία πάνω στην ευθεία  $y=x$
3. Αν το σημείο  $M(a, b)$  ανήκει στη γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης, τότε  $f^{-1}(b)=a$
4. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  τότε και η σύνθεσή τους έχει το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$ .
5. Αν η  $f$  είναι 1-1 τότε και η  $f^{-1}$  είναι επίσης 1-1. (15 μονάδες)

**A2.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, τότε ισχύει ότι οι συναρτήσεις  $(f \circ f^{-1})$  και  $(f^{-1} \circ f)$  είναι ίσες.» Να τον χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (10 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με τύπους:  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ ,  $x \in [0, +\infty)$  και  $g(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $(f \circ g)$  και να ελέγξετε αν είναι αντιστρέψιμη. (6+2=8 μονάδες)

**B2.** i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$  δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(6+4=10 μονάδες)

**B3.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f(g(x)) < f(x)$

(7 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \sin x - \eta \mu x - 1$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνήσια φθίνουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (8 μονάδες)

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $-2 \leq f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (10 μονάδες)

**Γ3.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) = x^2$ , για  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . (7 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + e^{x-2} - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το  $f^{-1}(0)$ . (4 μονάδες)

**Δ2.** Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = 1$ . (3 μονάδες)

**Δ3.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f^{-1}(\ln 2x) < 2$  (6 μονάδες)

**Δ4.** Να λυθεί η εξίσωση:  $f(1 + f^{-1}(x-2)) = 0$  (6 μονάδες)

**Δ5.** Να λυθεί η εξίσωση:  $|x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2$  (6 μονάδες)