

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 9

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ - ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ - Θ.Λ.Λ

Φ9.1 Κριτήριο παρεμβολής: Αν οι συναρτήσεις g και h έχουν όριο τον αριθμό λ καθώς το x τείνει στο x_0 και για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$.

Χρήση κριτηρίου παρεμβολής, όταν η $f(x)$ δίνεται εγκλωβισμένη από την αρχή ή όταν δίνεται σχέση της μορφής $|f(x)| < g(x)$, την οποία εμείς μετατρέπουμε σε διπλή ανίσωση για να λύσουμε. Υπάρχει ακόμα η περίπτωση του να πολ/με παράσταση που τείνει στο 0 με κάποια τριγωνομετρική που παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1 (γνωστό και ως «μηδενική επί φραγμένη»). Βάζουμε εμείς απόλυτη τιμή, μετατρέπουμε σε διπλή ανίσωση και κάνουμε πάλι χρήση του κριτηρίου παρεμβολής.

1. Αν ισχύει $3x \leq f(x) - x^2 + 2x \leq 5x - 4$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2. Αν ισχύει η σχέση: $\left| \frac{f(x) - 2x + 1}{x - 3} \right| \leq x^2 + 2$, υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

3. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 - 4) \cdot \eta\mu \frac{5}{x - 2} \right]$

Φ9.2 Τριγωνομετρικά όρια τα οποία στηρίζονται στις σχέσεις: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

Ξεκινάμε με τις πιο απλές μορφές.

Αποδείξτε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{bx} = \frac{a}{b}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9.3 Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε συνδυαστικά όσα έχουμε μάθει:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{7x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 3x}{2x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \eta\mu 5x}{x + \eta\mu 3x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3 + \varepsilon\varphi x}{2x + \eta\mu 2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 3x + x^2}{4x^2 + \eta\mu^2 5x}$$

9.4 Υπολογισμός ορίων της μορφής (0/0) όπου απαιτείται αλλαγή μεταβλητής, με απλά λόγια επιλέγουμε να ονομάσουμε με μια νέα μεταβλητή κάποια «κατάλληλη» ποσότητα:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1} - 2}{\sqrt[6]{x-1} - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu(2x - \pi)}{x^2 - \pi^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\eta\mu^2 x + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x + 9} - 3}$$

9.5 Όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης και ζητείται το όριο ενός «τμήματος» αυτής. Στην περίπτωση αυτή, ακολουθούμε τη διαδικασία Θ.Λ.Λ (Θέτω, λύνω, limαρω!!!). Ονομάζω με μια βοηθητική συνάρτηση την παράσταση της οποίας γνωρίζω το όριο, λύνω ως προς αυτό του οποίου ζητείται το όριο και βάζω lim και στα δύο μέλη.

1. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x + 3} = 5$, να βρείτε τα: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) + 7 - x^2}{x^2 + 3x}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x - 7) - 2}{x - 2}$
2. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x + 1) - 3}{x - 2} = 7$, να βρείτε τα: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3}$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x - 1) - x + 1}{x^2 - 16}$