

ΟΡΙΑ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ

Φ8.1 Τι ακριβώς σημαίνει η έκφραση «το x τείνει στο x_0 »;

Η μεταβλητή x παίρνει τιμές «κοντά» στο σταθερό αριθμό x_0 χωρίς να γίνεται ίση με αυτόν. Δηλαδή, εφόσον το επιτρέπει το πεδίο ορισμού, το

$x \in A = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, όπου δ θετικός αριθμός, εφόσον το σύνολο A είναι υποσύνολο του π.ορισμού της f .

Η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης f καθώς το x τείνει στο x_0 έχει νόημα μόνο αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος από το πεδίο ορισμού ή έστω και ανοικτό ή κλειστό άκρο διαστήματος από το πεδίο ορισμού.

Χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις :

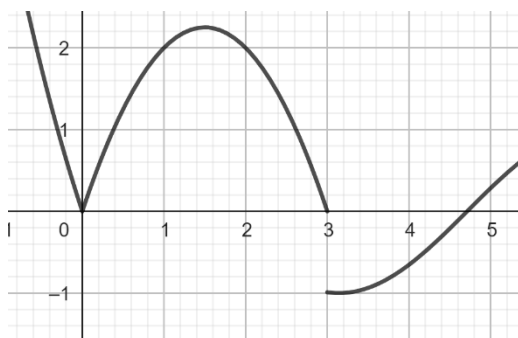
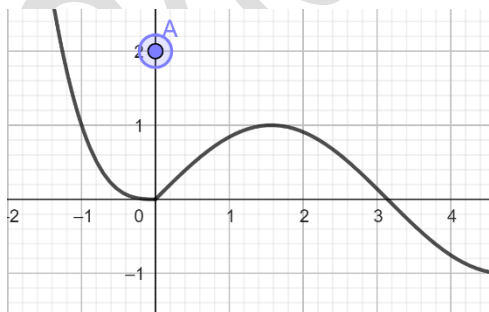
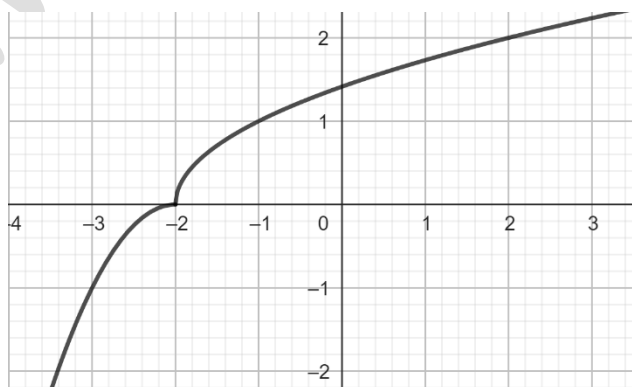
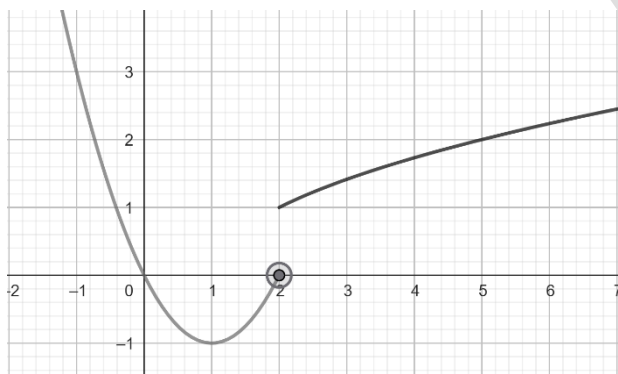
$x \rightarrow x_0^+$ ή $x \rightarrow x_0^-$ αν το πεδίο ορισμού δεν περιέχει τιμές ακριβώς πριν ή μετά από το x_0 .

Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, σημαίνει ότι οι τιμές της f πλησιάζουν στον αριθμό l καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν στον αριθμό x_0 , ενώ δεν έχει σημασία το αν ορίζεται το $f(x_0)$ ή αν ισούται με τον αριθμό l .

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

Αν για μια συνάρτηση f βρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Αν το όριο μιας συνάρτησης f καθώς το x τείνει στο x_0 είναι ο θετικός αριθμός l , τότε η $f(x)$ παίρνει θετικές τιμές για τιμές του x κοντά στο x_0 . Αντίστοιχα, θα παίρνει αρνητικές τιμές αν το l είναι αρνητικός αριθμός.



Βρείτε τα παρακάτω όρια με βάση τις γραφικές παραστάσεις:

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -3} g(x), \lim_{x \rightarrow -2} g(x), \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} t(x), \lim_{x \rightarrow 3} t(x)$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} h(x), \lim_{x \rightarrow 3} h(x)$$

8.2 Οι συζυγείς παραστάσεις και οι καταραμένες ταυτότητες με την τρίτη δύναμη - ρίζα.

Αρχική

Συζυγής

Τελικά

$$\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\sqrt[5]{x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - 1$$

$$2 - \sqrt{x-4}$$

$$\sqrt{x^2 + x} - x$$

$$\sqrt[3]{x} - 2$$

$$\sqrt[3]{x+8} - 2$$

$$1 - \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

$$\sqrt[3]{x+1} + 2$$

8.3 Ρητή της μορφής (0/0), με παραγοντοποίηση εμφανίζουμε το $(x-x_0)$ σε αριθμητή και παρονομαστή, απλοποιούμε και στη συνέχεια κάνουμε αντικατάσταση σε ότι έμεινε!

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 5x - 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 7x + 8}{x^3 + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 - 64}{x^4 + 2x^3 - 8x - 16}$$

8.4 Όριο άρρητης (0/0) με τετραγωνικές ρίζες. Συζυγή παράσταση όπου υπάρχουν παραστάσεις με ρίζες που μηδενίζονται, εμφανίζουμε και πάλι τον παράγοντα $(x-x_0)$, απλοποιούμε, αντικαθιστούμε με x_0 .

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - 3x} - 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2 - 2x + 8} - \sqrt{x^3 + 24}}$$

Φ8.5 Όριο άρρητης (0/0) με κυβικές ρίζες. Συζυγή παράσταση όπου απαιτείται, ενεργούμε στη συνέχεια όπως και στο βήμα Β.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 3x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt[3]{1-7x}}{\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{3-5x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt[3]{6-x}}{\sqrt{x^2 - 2x + 8} - \sqrt{-8x}}$$

Φ8.6 Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή, όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο δεν μηδενίζεται. Βγάζουμε την απόλυτη τιμή κρίνοντας το πρόσημο της παράστασης μέσα σε αυτό, προχωρούμε όπως στο βήμα Φ8.3.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 4| - 5}{|1 - x| - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 1| - |x^3 - 7|}{|x^3 + x| - 10}$$

8.7 Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή, όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο μηδενίζεται.

Ελέγχουμε μήπως ο όρος που μηδενίζεται με το απόλυτο, μπορεί να βγει κοινός παράγοντας σε αριθμητή και παρονομαστή. Αν όχι, φτιάχνουμε πινακάκια για το πρόσημο των παραστάσεων που μηδενίζονται και παίρνουμε πλευρικά όρια.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 + x - 12|}{|2x^2 - 5x - 3|}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|^3 + x+1}{|x^2 + 5x + 4|}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2 + x - 2| - |x^3 + 8|}{|x^2 - 4|}$$

8.8 Για να δούμε και κάτι πιο δύσκολο. Όριο άρρητης (0/0) με ριζικά διαφόρων τάξεων ή παραστάσεις όπου απαιτείται διάσπαση. Προσοχή, τα όρια στα οποία θα «σπάσουμε» το αρχικό, πρέπει να διατηρούν τη μορφή (0/0).

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x+6} + \sqrt{x+2} - 6}{x^2 - 4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt[3]{1-7x}}{x+1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt[3]{6-x} - 1}{x^2 + 2x}$$

Βασίλης Μπακούρος