

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 17

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1. Αν f συνεχής και 1-1 στο διάστημα Δ , να δείξετε ότι είναι και γνήσια μονότονη.
2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^5 + x^4 - x - 3$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f(x_0) = 19$.
3. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[2, 5]$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x) \cdot f(f(x)) = 10$, $x \in [2,5]$.
Να βρείτε το $f(4)$, αν $f(2)=5$.
4. α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[0,3]$, να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο $[0,3]$ ώστε να ισχύει η σχέση:
$$10f(x_0) = 7f(0) + 3f(3).$$

β. α. Αν f συνάρτηση συνεχής και γνήσια μονότονη στο $[0,3]$, να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο $(0,3)$ ώστε να ισχύει η σχέση: $5f(x_0) = 3f(1) + 2f(2)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = (e^{x-1} - 1)^4 \cdot (x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
α. Να δείξετε ότι η f έχει δύο θέσεις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ στις οποίες η f παίρνει ελάχιστη τιμή.
β. Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = f(x)$, $x \in [1,3]$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g παίρνει μέγιστη τιμή σε σημείο x_0 στο διάστημα $(1, 3)$.
6. α. Να βρείτε και να σχεδιάσετε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει: $f^2(x) = |x|$.
β. α. Να βρείτε και να σχεδιάσετε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει: $f^2(x) = \ln^2 x$.
7. Δίνεται η συνεχής στο $[-5, 5]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 25$ και $f(4) = -3$.
α. Να βρείτε τα σημεία τομής της με τον x και να αποδείξετε ότι έχει σταθερό πρόσημο στο $(-5, 5)$.
β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.
8. Αν για τη συνεχή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:
$$f(x) \cdot (f(x) - 4x) = \eta\mu^2 x - 4x^2 \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1,$$
 να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.
9. Αν για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:
$$f(x) \cdot (f(x) - 2\sin x) = 4\eta\mu^2 x + x^2 + 3\sin^2 x \text{ και } f(0) = 3,$$
 τότε:
α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin x + \sqrt{x^2 + 4}$.
β. Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της αν $x \in [\pi, 2\pi]$.
γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$, $x \in (0,1]$
α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
β. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού α , η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 - 3\alpha + 3$ έχει ακριβώς μία λύση.
γ. Αν η εξίσωση $f(x) = \ln k$, $k > 0$, είναι αδύνατη να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{(k-e)x}$

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 2, & x < 0 \\ \sin x - x + 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$.

β. Να δείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ετερόσημες ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in [x_1, 0]$, υπάρχει ακριβώς ένα $\beta \in [0, x_2]$ ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = \ln x + 2x - 3$, $x \in (0, +\infty)$ και $g(x) = 1 - x^2$.

α. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα ακριβώς σημείο.

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο.

γ. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x - x < \ln \sqrt{\frac{x}{\eta\mu x}}$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

13. Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2$ και η ευθεία $y = ax - 1$, $a \in (0, 2)$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Έστω σημείο $M(x, f(x))$, με $x \in [-a, a]$ το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης $d(x)$ που δίνει την απόσταση του σημείου M από την ευθεία.

γ. Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in [-a, a]$ ώστε η απόσταση $d(x_1)$ να γίνεται μεγαλύτερη από κάθε άλλη και η απόσταση $d(x_2)$ να είναι μικρότερη από κάθε άλλη απόσταση $d(x)$.

14. Για μια συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = k$, $k \in \mathbb{R}$ και $\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2 + xf(x) = 1$

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 2(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

β. Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha}{x+5} + \frac{\beta}{x+5}\right) f(x)$

γ. Για την συνάρτηση με τύπο $g(x) = f(x) + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τη μονοτονία της και να λύσετε την ανίσωση: $g(g(x)) \geq 2\sqrt{2}$

15. Αν για την συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι:

$$f^2(x) - 2\eta\mu x \cdot f(x) = x^2 + \sin^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = -1, \text{ τότε:}$$

α. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f .

Έστω $f(x) = \eta\mu x - \sqrt{x^2 + 1}$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό.

γ. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

16. Δίνεται η συνεχής στο $[1, 9]$ συνάρτηση f , η οποία δεν τέμνει τον xx' και για την οποία ισχύει ότι: $f(1) \cdot f(3) \cdot f(9) = -27$. Να δείξετε ότι η $f(x) < 0$ και ότι υπάρχει x_0 στο $(1, 9)$ ώστε $f(x_0) = -3$.