

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει για αυτήν ότι:

$$(x-3) \cdot f(x) \geq x^2 - 4x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε το } f(3).$$

2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει για αυτήν ότι:

$$x^3 \cdot f(x) \leq (\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sin x - 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε το } f(0).$$

3. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α. $(x-2)f(x) = x^2 - 5x + 6 + \eta\mu(x-2)$

β. $x^3 f(x) = x^2 \cdot \eta\mu 2x + x \cdot \eta\mu^2 x$

γ. $2x(f(x)-1) = \eta\mu 2x \cdot (\eta\mu 2x - f(x))$

4. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x+y) = f(x)(y+1) + f(y)(x+1) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Αν γνωρίζετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0, \text{ να δείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

5. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Αν γνωρίζετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0, \text{ να δείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

6. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Αν γνωρίζετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } 1, \text{ να δείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

7. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $f^3(x) + 3f(x) = e^{3x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $|f(x)| \leq |e^{3x} - 1|$

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = x + 2024$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

9. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

$$a. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 9, & x = 3 \end{cases}$$

$$b. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x^2 - 1)}{x - 1}, & x < 1 \\ \alpha + \beta + \gamma, & x = 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$c. f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 4}{x^2 - 4x + 4}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

$$d. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

10. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στο δεδομένο κάθε φορά διάστημα:

α. $(x-2)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)=0$ στο $(0,1)$. β. $3^x = \frac{5}{x^2+1}$ στο $(0,1)$

γ. $\sqrt{x-4} = \frac{2}{x+3}$ στο $(4,5)$ δ. $4^x + 3^x = 9^x$ στο $(0,1)$

11. Αν f είναι συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το (α, β) , να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μία λύση:

α. $f(x) + (\alpha + \beta)x = x^2 + x + \alpha\beta$ β. $(\beta - \alpha) \cdot 2^{f(x)} = 2^\beta(x - \alpha) + 2^\alpha(\beta - x)$

12. α. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,2]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = (f(0) + f(2))x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

β. Αν f είναι μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $3f(\alpha) + 2f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον xx' σε ένα τουλάχιστον σημείο ρ που ανήκει στο $[\alpha, \beta]$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln^3 x - \ln^2 x - 5\ln x + 2$, $x \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $|a| \leq 2$, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, e]$.

14. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στο δεδομένο κάθε φορά διάστημα:

α. $\frac{e^{2x}}{x-1} + \frac{x^2 + a^2x - 1}{x-2} = 0$, στο $(1,2)$. β. $\ln x = \frac{1}{x-1}$, στο $(1,e)$.

15. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, για $a > 0$, έχουν ακριβώς μία ρίζα:

α. $2\ln x + x - a = 0$ β. $\ln x = \frac{a}{x+1}$

16. α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xe^{x^2-4} + x^2 = 1$, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-2, 2)$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sin x + \frac{x^2}{4} - 1 = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^4 - x^3 + 5x - 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $2x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$ έχει δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

17. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^4 - x^2 - 5|x| + 3$

α. Να δείξετε ότι είναι άρτια και ότι έχει δύο τουλάχιστον θετικές ρίζες.

β. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις τουλάχιστον ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 οι δύο θετικές ρίζες της $f(x)$, να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{e^x}{x-x_1} + \frac{x^2+2x-3}{x-x_2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

18. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=f(6)$, τότε:

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(x+3)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 3]$.

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)$ έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο: $g(x) = 2f(x) - f(x+3)$.

Βασίλης Μπακούρος