

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 14

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

Φ14. 1 Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, $f(a) \neq f(\beta)$ και « η » ένας οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 , $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$.

Για παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^5 + x^4 - x - 7$. Να δείξετε ότι υπάρχει

$x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = 35$.

Επειδή f συνεχής στο $[1, 2]$ και $f(1) = -6$, $f(2) = 39$, είναι $f(1) < 35 < f(2)$, συνεπώς από το Θ.Ε.Τ υπάρχει

$x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = 35$.

α. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^5 + x^4 - x - 3$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = 19$.

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[2, 5]$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x) \cdot f(f(x)) = 10$, $x \in [2, 5]$.

Να βρείτε το $f(4)$, αν $f(2) = 5$.

Φ14. 2 Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής (ΘΜΕΤ): Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει ότι $f(x) \in [m, M]$, $m, M \in \mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχουν τιμές κ, K στο $[a, \beta]$ ώστε $f(\kappa) = m$, $f(K) = M$.

Δίνεται η συνάρτηση f , f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $A(x_0, y_0)$ ένα σταθερό σημείο που δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να δείξετε ότι αν M είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην γραφική παράσταση της f , η απόσταση AM παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Φ14. 3 Εύρεση συνόλου τιμών : Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε μπορούμε να βρίσκουμε το σύνολο τιμών της. Συγκεκριμένα, αν f συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της θα είναι το $[f(a), f(\beta)]$ αν η f είναι γνήσια αύξουσα ή το $[f(\beta), f(a)]$ εφόσον η f είναι γνήσια φθίνουσα. Αν η f είναι συνεχής στο (a, β) ή $[a, \beta)$ ή $(a, \beta]$, υπολογίζουμε τα όρια στα ανοικτά διαστήματα αντί για τα $f(a)$ ή $f(\beta)$. Βεβαίως απαιτείται (πάντα!) η μονοτονία της συνάρτησης f .

Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε το σύνολο τιμών της:

a. $f(x) = \ln x + x - 2$

b. $f(x) = 3 - e^x$

c. $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x-1}$

Φ14.4 Μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται πουθενά σε αυτό το διάστημα, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό, δηλαδή η γραφική της παράσταση βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον xx' ή ολόκληρη κάτω από αυτόν.

Η πρόταση αυτή μας δίνει το δικαίωμα να βρίσκουμε το πρόσημο μιας τέτοιας συνάρτησης γνωρίζοντας μία μόνο τιμή της σε κάθε διάστημα από το πεδίο ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση δεν μηδενίζεται.

Συνηθισμένη άσκηση εδώ είναι να βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης, με προτίμηση στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αφού για τις πολυωνυμικές η διαδικασία είναι γνωστή από την Β' Λυκείου (βρίσκω τις ρίζες, φτιάχνω πίνακάκι με πρόσημα).

Αν για παράδειγμα η συνάρτηση είναι η $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$ και μας ζητούν το πρόσημό της, λύνουμε πρώτα την εξίσωση $f(x)=0$, η οποία στο $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις το $\pi/4$ και το $5\pi/4$ και στη συνέχεια επιλέγουμε μία τιμή για καθένα από τα διαστήματα $[0, \pi/4)$, $(\pi/4, 5\pi/4)$ και $(5\pi/4, 2\pi]$ υπολογίζοντας τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης f .

Βρίσκω ως πούμε ότι $f(0)=-1 < 0$, $f(\pi)=1$ και $f(2\pi)=-1$, συνεπώς η $f(x)$ παίρνει θετικές τιμές για κάθε x από το διάστημα $(\pi/4, 5\pi/4)$ και αρνητικές στα άλλα δύο ανοικτά διαστήματα από το πεδίο ορισμού της.

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, βρείτε το πρόσημο για τις συναρτήσεις:

a. $f(x) = \epsilon\phi x - 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και b. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$

§14.5 Εύρεση του τύπου μιας συνεχούς συνάρτησης από μια δοσμένη συναρτησιακή σχέση.

Η διαδικασία στηρίζεται στα προηγούμενα θεωρήματα. Βασικό ξεκίνημα είναι να δούμε αν η συνάρτηση μπορεί να μηδενιστεί.

α. Αν δεν μηδενίζεται πουθενά, διατηρεί πρόσημο, που σημαίνει ότι απλά λύνουμε τη δοσμένη σχέση ως προς $f(x)$ και αξιοποιούμε την αρχική συνθήκη. Δείτε αυτό:

Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f^2(x) - x^2 = 4$ και $f(1) = -\sqrt{5}$, να βρείτε την f .

Είναι $f^2(x) = x^2 + 4$. Αν υπήρχε ρ ώστε $f(\rho) = 0$, θα είχαμε $0 = \rho^2 + 4$, άτοπο, συνεπώς $f(x) \neq 0$ για κάθε x άρα η f διατηρεί πρόσημο και μάλιστα αρνητικό αφού $f(1) = -\sqrt{5}$.

Λύνοντας λοιπόν την παραπάνω σχέση, βρίσκουμε

$|f(x)| = \sqrt{x^2 + 4}$ και αφού $f(x) < 0$, προκύπτει ότι $f(x) = -\sqrt{x^2 + 4}$.

Με τον ίδιο τρόπο, βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία γνωρίζουμε ότι :

$$f^2(x) - 5 = x^2 + 3x \text{ και } f(1) = 3$$

β. Αν η συνάρτηση μηδενίζεται μόνο στα άκρα του πεδίου ορισμού της, λειτουργούμε όπως και στην περίπτωση (α).

Βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία γνωρίζουμε ότι :

$$f^2(x) + x^2 = 9 \text{ και } f(0) = -3$$

γ. Αν η συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα, τότε η αρχική συνθήκη θα πρέπει να περιλαμβάνει δύο τιμές της f αλλιώς υπάρχουν παραπάνω από μία απαντήσεις!

Για παράδειγμα, αν $f^2(x) = \ln^2 x$, $x \in (0, +\infty)$, είναι $|f(x)| = |\ln x|$ ενώ $f(x) = 0$ μόνο για $x = 1$.

Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν τέσσερις συναρτήσεις που ανταποκρίνονται στα δεδομένα:

$$f(x) = \ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty), f(x) = -\ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty), f(x) = \begin{cases} -\ln x, & x \in (0, 1) \\ \ln x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}, f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0, 1) \\ -\ln x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Να βρείτε την συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $f^2(x) - 1 = x^2 + 2x$

δ. Αν η δοσμένη συναρτησιακή σχέση περιλαμβάνει τις ποσότητες $f^2(x)$ και $f(x)$, προχωράμε με συμπλήρωση τετραγώνου και εφαρμόζουμε ότι είδαμε από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$f^2(x) - 4xf(x) = 3 - 4x^2, f(1) > 2.$$