

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 13

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

13. 1 Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει για αυτήν ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον x' σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των a και β , συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

Το θεώρημα χρησιμοποιείται σε εξισώσεις όπου δεν είναι δυνατή η αλγεβρική τους επίλυση και δεν βρίσκει την ρίζα, απλώς βεβαιώνει την ύπαρξή της.

Μικρά και χρήσιμα:

- Γενικά, στην εξίσωση που μας ζητούν την ύπαρξη ρίζας, ξεκινάμε φέρνοντας τα πάντα στο 1^ο μέλος και ονομάζοντας συνάρτηση. Αν η αρχική εξίσωση είναι κλασματική, τότε ξεκινάμε με απαλοιφή παρονομαστών και κατόπιν ονομάζουμε τη συνάρτηση.
- Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ αλλά $f(a) \cdot f(\beta) \leq 0$, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν $f(a)=0$ ή $f(\beta)=0$ τότε η ρίζα είναι το a ή το β , αλλιώς εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα Bolzano.
- Αν το πεδίο ορισμού δεν επιτρέπει τον υπολογισμό ή την εύρεση προσήμου των $f(a)$ ή/και $f(\beta)$, μπορούμε να βρούμε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ή / και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Δείτε το παράδειγμα:

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2x = 3$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln x + 2x - 3$ και βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, συνεπώς υπάρχει a θετικός κοντά στο 0 ώστε $f(a) < 0$.

Ομοίως, επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει β , β μεγάλος θετικός αριθμός ώστε $f(\beta) > 0$.

Άρα, με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο (a, β) , υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

- Για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου $f(a) \cdot f(\beta)$, δεν είναι απαραίτητο να ξέρουμε το πρόσημο κάθε μιας από τις τιμές $f(a)$, $f(\beta)$. Αν για παράδειγμα, $f(a) = k - m$, $f(\beta) = m - k$ τότε $f(a) \cdot f(\beta) = -(k - m)^2 < 0$ για κάθε $m \neq k$.
- Αν μας ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, τότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.

13. 2 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στο δεδομένο κάθε φορά διάστημα:

a. $(x-2)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = 0$ στο $(0,1)$. b. $3^x = \frac{5}{x^2 + 1}$ στο $(0,1)$

c. $\sqrt{x-4} = \frac{2}{x+3}$ στο $(4,5)$ d. $4^x + 3^x = 9^x$ στο $(0,1)$

13. 3 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στο δεδομένο κάθε φορά διάστημα:

a. $\frac{e^{2x}}{x-1} + \frac{x^2 + a^2x - 1}{x-2} = 0$, στο $(1,2)$. b. $\ln x = \frac{1}{x-1}$, στο $(1,e)$.

13. 4 Αν f είναι συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το (α, β) , να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μία λύση:

a. $f(x) + (\alpha + \beta)x = x^2 + x + \alpha\beta$ b. $(\beta - \alpha) \cdot 2^{f(x)} = 2^\beta(x - \alpha) + 2^\alpha(\beta - x)$

13.5 α. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,2]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = (f(0) + f(2))x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

β. Αν f είναι μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $3f(\alpha) + 2f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον xx' σε ένα τουλάχιστον σημείο p που ανήκει στο $[\alpha, \beta]$.

13. 6 α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xe^{x^2-4} + x^2 = 1$, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-2, 2)$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $2x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$ έχει δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

13. 7 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^4 - x^2 - 5|x| + 3$

α. Να δείξετε ότι είναι άρτια και ότι έχει δύο τουλάχιστον θετικές ρίζες.

β. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις τουλάχιστον ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 οι δύο θετικές ρίζες της $f(x)$, να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{e^x}{x-x_1} + \frac{x^2+2x-3}{x-x_2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

Βασίλης Μπακούρος