

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 12

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Φ12.1 Μια συνάρτηση μπορεί να χαρακτηριστεί συνεχής ή ασυνεχής, μόνο σε τιμές που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της. Γραφικά, είναι εύκολο να δεις αν είναι συνεχής μια συνάρτηση: Η γραφική της παράσταση δεν «κόβεται» πουθενά και με κανένα τρόπο. Αλγεβρικά τώρα:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο A . Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ισοδύναμοι

ορισμοί: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα (a, b) , αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in (a, b)$, ενώ η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ αν ισχύει ότι είναι συνεχής στο (a, b) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

Συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους είναι οι πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές καθώς και οποιαδήποτε συνάρτηση παράγεται από πράξη $(+, -, \cdot, :)$ μεταξύ τέτοιων συναρτήσεων, όπως επίσης και τα ριζικά, οι απόλυτες τιμές και οι δυνάμεις τέτοιων συναρτήσεων.

Είναι προφανές, πως οι μόνες συναρτήσεις για τις οποίες απαιτείται έλεγχος της συνέχειάς τους με τον ορισμό, είναι όσες ορίζονται με κλάδους και μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος τους! Όλες οι υπόλοιπες λέμε ότι είναι συνεχείς ως «πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων». Με βάση τα παραπάνω, να ελέγξετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις, εντοπίζοντας και δικαιολογώντας αν υπάρχουν σημεία ασυνέχειας:

$$a. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$b. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$c. f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu 2x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Για τις παρακάτω συναρτήσεις, βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε να είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού τους:

$$d. f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + a, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$e. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a^2 - 2a + 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$f. f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu 2x}{ax}, & x > 0 \end{cases}$$

12.2 Αν για μια συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο της x_0 και μας ζητούν να βρούμε ή μας χρειάζεται η τιμή $f(x_0)$ η οποία δεν υπολογίζεται με αντικατάσταση, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας βρίσκουμε το $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Για παράδειγμα: Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $x \cdot f(x) = \eta\mu 3x + x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Προφανώς, για $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{x} + x - 2$. Το $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\eta\mu 3x}{x} + x - 2) = 1$, συνεπώς τελικά:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x} + x - 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Προσπαθήστε λοιπόν να βρείτε τον τύπο της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α. $(x - 2)f(x) = x^2 - 5x + 6 + \eta\mu(x - 2)$

β. $x^3 f(x) = x^2 \cdot \eta\mu 2x + x \cdot \eta\mu^2 x$

γ. $2x(f(x) - 1) = \eta\mu 2x \cdot (\eta\mu 2x - f(x))$

δ. Επίσης, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει για αυτήν ότι:

$(x - 3) \cdot f(x) \geq x^2 - 4x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $f(3)$.

Βασίλης Μπακούρος