

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 11

ΟΡΙΑ ΟΤΑΝ ΤΟ x ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Φ11.1 Ξεκινάμε με τη βασική θεωρία:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = -\infty$ αν v περιττός ή $+\infty$ αν v άρτιος.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^v} = 0 \ (a \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) = a_v \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^v, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_v x^v}{\beta_k x^k}$$

Απροσδιόριστες μορφές: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $(+\infty) - (+\infty)$

Φ11.2 Όταν πρέπει να βρούμε όριο πολυωνυμικής ή ρητής συνάρτησης, κρατάμε το μεγιστοβάθμιο όρο, ή το λόγο των δύο μεγιστοβάθμιων στις ρητές.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + 2}{x^2 + x + 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 2x}{x^2 + x + 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^5 + x + 1} \quad 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x + 2}{3x^5 + x + 1}$$

Φ11.3 Αν πρέπει να βρούμε όριο ρίζας, βρίσκουμε το όριο της υπόριζης ποσότητας και αν αυτό είναι συν άπειρο, τότε το αποτέλεσμα είναι συν άπειρο.

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^3 - 5x + 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 + x^3 - 2} - x) \quad 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + x^2 - 2} + 2x)$$

Φ11.4 Απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ με άρρητες παραστάσεις σε αριθμητή ή/και παρονομαστή.

Για να άρουμε την απροσδιοριστία, βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο σε αριθμητή και παρονομαστή. Προσοχή!!! Αυτό που βγάζετε εκτός ρίζας πρέπει να είναι μη αρνητική ποσότητα, συνεπώς του βάζουμε απόλυτη τιμή ή - καλύτερα - κρίνουμε το πρόσημο ανάλογα με το αν το x τείνει στον συν ή το πλην άπειρο. Προσοχή ακόμα αν η τάξη της ρίζας είναι διαφορετική από το βαθμό της υπόριζης

ποσότητας. Δείτε στα παρακάτω παραδείγματα πως βγάζουμε τον κοινό παράγοντα:

Όταν $x \rightarrow +\infty$:

$$\sqrt{4x^2 - 5x + 1} = 2x\sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}}, \quad \sqrt[4]{x^3 - 2x + 7} = x \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{7}{x^4}}, \quad \sqrt{5x^2 + 2x} = x\sqrt{5 + \frac{2}{x}}$$

Όταν $x \rightarrow -\infty$:

$$\sqrt{4x^2 - 5x + 1} = -2x\sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}}, \quad \sqrt[3]{x^2 - 2x + 7} = -x \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^3}}, \quad \sqrt{5x^2 + 2x} = -x\sqrt{5 + \frac{2}{x}}$$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x - 1}}{3x + 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - x}{3x - \sqrt{x^2 + x + 1}}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 5}}{\sqrt[4]{x^4 + x - 3} + x}$

11.5 Απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$ με άρρητες παραστάσεις.

Αθροίζουμε (πρόχειρα, με το μάτι!) τους μεγιστοβάθμιους όρους και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α. Αν το άθροισμα είναι μηδέν, κάνουμε συζυγή παράσταση και στη συνέχεια έχουμε βρεθεί στην περίπτωση (Γ). Είναι δυνατόν να απαιτείται διάσπαση σε κλάσματα όταν υπάρχουν πάνω από δύο ριζικά στον αριθμητή και σε αυτήν την περίπτωση χρειάζεται να προσθαφαιρέσουμε κατάλληλες ποσότητες ώστε να διατηρείται στο μηδέν το αλγεβρικό άθροισμα. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x + x - \sqrt{x^2 - x + 5}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x} + \frac{x - 5}{x + \sqrt{x^2 - x + 5}} \right) = \dots = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

β. Αν το άθροισμα δεν είναι μηδέν, βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{4x^2 - 3x - 1} + \sqrt[3]{x^2 + 5})$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x - 1})$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x + 2} + \sqrt{x^2 + 5x - 2} + 4x)$ 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

Δοκιμάζουμε να λύσουμε, αφού πρώτα εντοπίσουμε σε ποια περίπτωση βρισκόμαστε:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x} + x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 2x + 5} - 3x)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 - 3x + 1}}{\sqrt{4x^2 - x - 3} + 3x}$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x - 1} + \sqrt{9x^2 - 5x + 3} + 5x \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 5x} - \sqrt[4]{x^3 - 2x - 5} \right)$$

11.6 Αν έχουμε τριγωνομετρικά όρια με το x να τείνει στο άπειρο, διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

α. Αν εμφανίζεται το $(\eta\mu(1/x))$, φροντίζουμε να «κολλήσουμε» δίπλα του το x , ώστε να πρέπει να βρούμε

$$\text{το } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1, \text{ όπου } y = \frac{1}{x}.$$

β. Τα όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta\mu x}{x^v}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^v}$, δείχνουμε με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής ότι

τείνουν στο μηδέν.

γ. Γενικά, σε οποιαδήποτε παράσταση περιέχει τριγωνομετρικούς όρους, πρώτα ελέγχουμε αν μπορούμε να εμφανίσουμε την περίπτωση (α), διαφορετικά κάνουμε κριτήριο παρεμβολής.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 5}{3x^2 + x - 2} \cdot \eta\mu \frac{3}{x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x \sigma\upsilon\nu x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 3\eta\mu 2x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x - 2)\eta\mu 2x}{x^2 - 5x - 2} \quad 5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x}{x - 4}$$

11. 7 Όταν έχουμε να βρούμε όριο εκθετικής-λογαριθμικής, σε περίπτωση απροσδιοριστίας (άπειρο/άπειρο), αν το x τείνει στο συν άπειρο, βγάζουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον όρο με τη μεγαλύτερη βάση, οπότε -κατ' αναλογίαν - βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο με τη μικρότερη βάση όταν το x τείνει στο μείον άπειρο. Με τον τρόπο αυτό, το όριο των ποσοτήτων της μορφής $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$ που δημιουργούνται, είναι μηδέν.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - 2 \cdot e^{x-1}}{4^x - 3^x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} - 2 \cdot e^{x-1}}{4^x - 3^x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\ln(x^2+1)}$$