

EMA A

$$A1: \Sigma \omega_{\alpha\beta\gamma} - \Lambda_0^2 \vartheta_{\alpha\beta\gamma} - \Sigma \omega_{\alpha\beta\gamma} - \Lambda_0^2 \vartheta_{\alpha\beta\gamma} - \Sigma \omega_{\alpha\beta\gamma}$$

A2: $\varphi \in \mathcal{S}_{\text{inj}}$. Ist $(f \circ f^{-1})(x) = x$ für jedes $x \in f(A)$ und

$(f^{-1} \circ g)(x) = x$ για $x \in A$ δηλ. έχουμε διαφορετικές ηδεις ορισμού.

(A2) ius: $f(x) = \ln x$, $f^{-1}(x) = e^x$
 $(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Q E M A B.

Ei var $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \sqrt{x}-1, x \in [0, +\infty)$

B1. $A_{f,g} = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{non} \\ g(x) \in [0, +\infty) \end{array} \right\} = \mathbb{R} \quad \forall \quad f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1} = |x| - 1.$

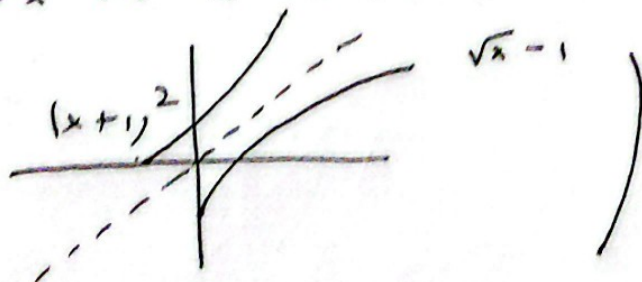
$\hookrightarrow (f \circ g)$ dev évan $s-1$, aussi $(f \circ g)(-1) = (f \circ g)(1) = 0$.

(n γαγινά: )

B2. i) H $f(x) = \sqrt{x} - 1$ είναι προφανώς γνήσια αυξανόμενη
 άρα 1-1. Έτσι αν $y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = y + 1$ με $y \geq -1$
 $\Rightarrow x = (y + 1)^2$, άρα $f^{-1}(x) = (x + 1)^2$, $x \in [-1, +\infty)$

ii) Επειδή f, f^{-1} $\uparrow$, τα μονα του, σημαίνει ότι να βρίσκονται πάνω στην $y=x$ δηλ. $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$
 $f^{-1}(x) = x \Rightarrow (x+1)^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ αδύνατη ($\Delta = -3$)

(Aλλ,ω, γραμμή:



B3. $f(g(x)) < f(x) \Leftrightarrow |x| - 1 < \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x} \Leftrightarrow$
 $x^2 < x \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1).$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$ με $x_1 < x_2$. Επειδή η $(\sin x)$ είναι
 γν. φθίν. ενώ η $(\eta\gamma x)$ γν. αυξαν. στο $[0, \pi/2]$ έχουμε:

$\sin x_1 > \sin x_2, \quad \eta\gamma x_1 < \eta\gamma x_2 \Rightarrow -\eta\gamma x_1 > -\eta\gamma x_2$ άρα
 με πρόσθεση μετὰ γέτη: $\sin x_1 - \eta\gamma x_1 - 1 > \sin x_2 - \eta\gamma x_2 - 1$
 $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$ δηλ. $f \nearrow$ στο $[0, \pi/2]$.

Γ2. Εφόσον $0 \leq x \leq \pi/2 \xrightarrow{f \nearrow} f(0) \geq f(x) \geq f(\pi/2) \Leftrightarrow$
 $0 \geq f(x) \geq -2$ δηλ. $f(x) \in [-2, 0]$

Γ3. Επειδή $x^2 \geq 0$ ενώ $f(x) \leq 0$, η γόνη συνάρτη-
 λυση της εξίσωσης θα ήταν αν $x^2 = 0 = f(x)$
 που ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow e^{x_1-2} < e^{x_2-2} \Rightarrow$
 $x_1 + e^{x_1-2} - 3 < x_2 + e^{x_2-2} - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$

Αν $f^{-1}(0) = \alpha \Rightarrow 0 = f(\alpha) \Rightarrow f(2) = f(\alpha) \xrightarrow{f \nearrow} \alpha = 2$
 συνεπώς $f^{-1}(0) = 2$.

Δ2. $f^{-1}(x) = 1 \xrightarrow{f \nearrow} f(f^{-1}(x)) = f(1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} - 2$

Δ3. $f^{-1}(\ln 2x) < 2 \xrightarrow{f \nearrow} \ln 2x < f(2) \quad \mu\epsilon \quad x > 0 \Rightarrow$
 $\ln 2x < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < 1/2,$

συνεπώς $x \in (0, 1/2).$

$$\Delta 4. \quad f(1 + f^{-1}(x-2)) = 0 = f(2) \quad \xrightarrow{f^{-1}}$$

$$1 + f^{-1}(x-2) = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad f^{-1}(x-2) = 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x-2 = f(1) \quad (\Leftrightarrow) \quad x-2 = \frac{1}{e} - 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{1}{e}.$$

$$\Delta 5. \quad |x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|-2} \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{|x|} + |x| + 2 = e^{x^2-2} + x^2$$

$$\Rightarrow e^{|x|} + (|x| + 2) - 3 = e^{x^2-2} + x^2 - 3 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$f(|x| + 2) = f(x^2) \Rightarrow x^2 = |x| + 2 \Rightarrow$$

$$|x|^2 - |x| - 2 = 0 \quad \text{όρα} \quad |x| = 1 \quad \eta \quad |x| = -2$$

$$\text{συγκεκριμένα δευτερά λύση} \quad \eta \quad |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$