ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΓΕΠ-2 ΑΠΡΙΛΗΣ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ **(7 μονάδες)**

Α2. Να γράψετε το θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του . **(1+3=4 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση η οποία δεν είναι αντιστρέψιμη, δέχεται μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη». Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» (**1 μονάδα**) και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Αν f είναι μια αντιστρέψιμη συνάρτηση και f^{-1} η αντίστροφή της, τότε η αντίστροφη της f^{-1} είναι πάλι η αρχική συνάρτηση f.

β. Μια πολυωνυμική συνάρτηση με βαθμό μεγαλύτερο του 2, δεν έχει ασύμπτωτες.

γ. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x = 0$

δ. Αν F είναι η αρχική μιας συνεχούς συνάρτησης f , τότε η F είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.

ε. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R που έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1 , x_2 , διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις h, p με τύπους:

$h(x) = \dfrac{2e^{x+1}}{e^{2x+2}-1},\ x \neq -1$ και $p(x) = \ln x - 1,\ x > 0$

Β1. Να ορίσετε την συνάρτηση f, όπου $f(x) = (h \circ p)(x)$. **(6 μονάδες)**

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1},\ x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα – αν υπάρχουν - της συνάρτησης f. **(5 μονάδες)**

Β3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής της f η οποία να διέρχεται από το (0,0). **(6 μονάδες)**

Β4. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο $(1,+\infty)$ και να βρείτε την αντίστροφή της. **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x < 0 \\ a\eta\mu x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x + \eta\mu x} = 4$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α. **(4 μονάδες)**

Για α=4:

Γ2. i. Να βρείτε τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f. **(5 μονάδες)**

ii. Να βρείτε – αν υπάρχει – το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+1}{4x-f(x)}$. **(3 μονάδες)**

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο x=0 και των ευθειών x=-2 και $x=\dfrac{\pi}{2}$. **(6 μονάδες)**

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο: $g(x)=\beta e^{x},\ \beta\in\mathbb{R}$

Γ4. i. Να βρείτε το β ώστε η εφαπτομένη της f στο x=0, να εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της g και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. **(3 μονάδες)**

Για β=4/e :

ii. Ένα σημείο M(x,0) ξεκινά από το (0,0) και κινείται πάνω στον άξονα των x με ταχύτητα 2 μ/s. Αν η κάθετη στον χχ΄ που περνά από το Μ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των f και g στα σημεία A(x,f(x)) και B(x,g(x)) , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους AB τη στιγμή όπου x=1. **(4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x-3\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

Δ1. Να δείξετε ότι η γραφική της τέμνει σε δύο ακριβώς σημεία x_1 , x_2 με $x_1<3<x_2$ τον οριζόντιο άξονα και είναι κάτω από αυτόν για κάθε $x\in(x_1,x_2)$. **(8 μονάδες)**

Δ2. i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=f(6-x)-f(x),\ \ x\in(0,6)$ είναι γνήσια αύξουσα και **(4 μονάδες)**

ii. Να αποδείξετε ότι $f(6-x_1)<0$ **(4 μονάδες)**

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $h(x)=x^3-e^x,\ \ x\in[x_1,x_2]$ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο x_o και να εξετάσετε αν αυτό το σημείο μπορεί να είναι θέση ελάχιστου της f. **(4 μονάδες)**

Δ4. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο διάστημα $[x_1,3]$ και να υπολογίσετε το άθροισμα: $A=\int_{x_1}^{3}f(x)dx+\int_{0}^{3\ln\left(\frac{e}{3}\right)}f^{-1}(x)dx$. **(5 μονάδες)**