ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ – ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2025

ΘΕΜΑ Α

ΛΥΣΗ

Α1. Σχολικό βιβλίο , σελ. 116 - 117

Α2. Σχολικό βιβλίο , σελ. 128 - 129

Α3. **Αληθής.**

Αφού η f δεν είναι αντιστρέψιμη , υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια , ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Από το Θ.Rolle στο $[x_1, x_2]$, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$: $f'(\xi) = 0$

Α4. **α. Σ , β. Σ , γ. Σ , δ. Λ , ε. Λ**

ΘΕΜΑ Β

ΛΥΣΗ

Β1. $D_f = \{x > 0 \wedge p(x) \neq -1\} = \{x > 0 \wedge \ln x \neq 0\} = \{x > 0 \wedge x \neq 1\} = (0,1) \cup (1, +\infty)$

$$f(x) = h(p(x)) = \frac{2 \cdot e^{\ln x - 1 + 1}}{e^{2(\ln x - 1) + 2} - 1} = \frac{2 \cdot e^{\ln x}}{e^{\ln x^2} - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1}\ ,\ x \in (0,1) \cup (1, +\infty).$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f με $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ και επειδή $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, η $f \searrow (0,1)$ και $f \searrow (1, +\infty)$. Ακρότατα δεν έχει.

Β3. Η γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(\xi, f(\xi))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία ε: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Η (ε) διέρχεται από το $O(0,0)$ αν και μόνο αν

$$f(\xi) = \xi f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{2\xi}{\xi^2 - 1} = \frac{-2\xi(\xi^2+1)}{(\xi^2-1)^2} \Leftrightarrow \xi^2 - 1 = -\xi^2 - 1 \Leftrightarrow \xi = 0$$, απορρίπτεται γιατί $\xi \in D_f$.

Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της γρ. παράστασης της f που να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Β4. Επειδή $f \searrow (1, +\infty)$, η f είναι και «1-1» στο $(1, +\infty)$, άρα αντιστρέφεται.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$ και

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2x}{x+1} \right) = 1 > 0$ και $\lim_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} \right) = +\infty$.

Επειδή η f συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή και γν. φθίνουσα : $D_{f^{-1}}=f\left((1,+\infty)\right)=(0,+\infty)$

Άρα για κάθε $y>0$ υπάρχει $x\in(1,+\infty)$:

$$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1}=y\Leftrightarrow yx^2-2x-y=0\overset{x>1}{\Leftrightarrow} x=\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$$

Οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

ΛΥΣΗ

Γ1. Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ η $f(x)=x^2+\alpha x$, παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+\alpha$

Για κάθε $x\in(0,\pi]$ η $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu x$, παραγωγίσιμη με $f'(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x$

Για $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+\alpha)=\alpha\in\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha\cdot\eta\mu x}{x}=\alpha\cdot 1=\alpha\in\mathbb{R}$, άρα η f παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=\alpha$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=(-\infty,\pi]$ με $f'(x)=\begin{cases}2x+\alpha, & x<0\\ \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, άρα και συνεχής.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(2x)}{x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x^2+2\alpha x}{x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x+2\alpha}{1+\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{2\alpha}{1+1}=\alpha$, οπότε αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x+\eta\mu x}=4$,

είναι $\alpha=4$.

Γ2. i) Είναι $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, & x<0\\ 4\cdot\eta\mu x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ και $f'(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ 4\cdot\sigma\upsilon\nu x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ οπότε

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=\dfrac{\pi}{2}$.

Η f συνεχής στο $(-\infty,-2]$ και $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-2)$, άρα $f\searrow(-\infty,-2]$,

η f συνεχής στο $\left[-2,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και $f'(x)>0$ στο $\left(-2,\dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα $f\nearrow\left[-2,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και η f συνεχής στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ και $f'(x)<0$ στο $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα $f\searrow\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=-2$, το $f(-2)=-4$, τοπικό μέγιστο για $x=\dfrac{\pi}{2}$, το $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$ και τοπικό ελάχιστο για $x=\pi$, το $f(\pi)=0$.

Επίσης επειδή $f''(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ -4\cdot\eta\mu x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,\pi]$

και το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(4x+1)=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(4x-f(x))=0$

Στο $O(0,0)$ η C_f έχει εφαπτομένη την ευθεία ε: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=4x$

Για κάθε $x\in(-\infty,0)$, αφού η f είναι κυρτή, ισχύει $f(x)>4x\Leftrightarrow 4x-f(x)<0$, ενώ για κάθε $x\in(0,\pi]$, αφού η f κοίλη ισχύει $f(x)<4x\Leftrightarrow 4x-f(x)>0$. Οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x+1}{4x-f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}(4x+1)\dfrac{1}{4x-f(x)}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x+1}{4x-f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}(4x+1)\dfrac{1}{4x-f(x)}=+\infty$,

άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με :

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-4x|dx=\int_{-2}^{0}(f(x)-4x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4x-f(x))dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^2)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4x-4ημx)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2+4συνx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}+\frac{\pi^2}{2}-4=\frac{\pi^2}{2}-\frac{4}{3}=\frac{3\pi^2-8}{6}\text{τ.μ.}$$

Γ4. i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g'(x)=\beta\cdot e^x$ και στο σημείο $K(x_0,g(x_0))$ η C_g έχει εφαπτομένη με εξίσωση $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=\beta e^{x_0}x-x_0\beta e^{x_0}+\beta e^{x_0}$.

Η (ε) εφάπτεται στη C_g αν και μόνο αν $\left\{\begin{matrix}\beta e^{x_0}=4\\ \beta e^{x_0}-x_0\beta e^{x_0}=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\beta=\dfrac{4}{e}\\ x_0=1\end{matrix}\right\}$, άρα το σημείο επαφής είναι το $K(1,4)$.

ii) Για κάθε $x\in[0,\pi]$: $d(x)=(AB)=|f(x)-g(x)|=|4ημx-4e^{x-1}|=4e^{x-1}-4ημx$

αφού ισχύει $4e^{x-1}\ge 4(x-1+1)=4x\ge 4ημx$, $\forall x\in[0,\pi]$.

Οπότε $d(t)=4e^{x(t)-1}-4ημ(x(t))$, $\forall t\ge 0$ και $d'(t)=4\left(e^{x(t)-1}-συν(x(t))\right)x'(t)$, $\forall t\ge 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0)=1$ και $x'(t_0)=2μ/s$ έχουμε :

$$d'(t_0)=4\left(e^{x(t_0)-1}-συν(x(t_0))\right)x'(t_0)=8(1-συν1)μ/s$$

ΘΕΜΑ Δ

ΛΥΣΗ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=1-\frac{3}{x}=\frac{x-3}{x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Η f συνεχής στο $(0,3]$ και $f'(x)<0$ στο $(0,3)$, άρα $f\searrow(0,3]$ και η f συνεχής στο $[3,+\infty)$ $f'(x)>0$ στο $(3,+\infty)$, άρα $f\nearrow[3,+\infty)$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (και ολικό) για $x=3$ το $f(3)=3-3\ln3=3\ln\left(\frac{e}{3}\right)<0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-3\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-3\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty \text{ , αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,3]$ και $f\searrow(0,3]$, άρα $f((0,3])=\left[3\ln\left(\frac{e}{3}\right),+\infty\right)$

Το $0\in f((0,3])$, άρα υπάρχει $x_1\in(0,3):\ f(x_1)=0$ και αφού η $f\searrow(0,3]$ η x_1 μοναδική ρίζα της f στο $(0,3]$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$ και $f\nearrow[3,+\infty)$, άρα $f([3,+\infty))=\left[3\ln\left(\frac{e}{3}\right),+\infty\right)$, το $0\in f([3,+\infty))$, άρα υπάρχει $x_2\in(3,+\infty):\ f(x_2)=0$ και αφού η $f\nearrow[3,+\infty)$ η x_2 μοναδική ρίζα της f στο $[3,+\infty)$. Οπότε η C_f τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε 2 ακριβώς σημεία x_1,x_2 με $0<x_1<3<x_2$.

Για κάθε $x_1<x\le3\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(x)\Rightarrow f(x)<0$ και για κάθε

$3\le x<x_2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)<f(x_2)\Rightarrow f(x)<0$, άρα για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Δ2. i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,6)$ με $g'(x)=-f'(6-x)-f'(x)=\ldots=\frac{2(x-3)^2}{x(6-x)}$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα , αφού $g'(x)>0$, $\forall x\in(0,3)\cup(3,6)$ και η g συνεχής.

ii) Αφού η g γνησίως αύξουσα και

$0<x_1<3\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x_1)<g(3)\Rightarrow f(6-x_1)-f(x_1)<0\Rightarrow f(6-x_1)<0$, αφού $f(x_1)=0$.

Δ3. $f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1-3\ln x_1=0\Leftrightarrow x_1=\ln x_1^3\Leftrightarrow e^{x_1}=x_1^3\Leftrightarrow h(x_1)=0$ και ομοίως

$f(x_2)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow h(x_2)=0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=3x^2-e^x$, από το Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2):\ h'(x_0)=0$, δηλ. η h έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο. Το $x_0\neq3$ γιατί $h'(3)=27-e^3\neq0$, άρα το x_0 δεν μπορεί να είναι η θέση ελαχίστου της συνάρτησης f.

Δ4. Επειδή $[x_1,3]\subset(0,3]$ και η $f\searrow(0,3]$ είναι και $f\searrow[x_1,3]$, άρα και «1-1» , άρα η f αντιστρέφεται στο $[x_1,3]$ και η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $f([x_1,3])=\left[3\ln\left(\frac{e}{3}\right),0\right]$ αφού η f συνεχής και γν. αύξουσα στο $[x_1,3]$.

Για το $I=\int_0^{3\ln\left(\frac{e}{3}\right)} f^{-1}(x)dx$, θέτουμε $u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u)$, άρα $dx=f'(u)du$ και $x=0\rightarrow u=x_1$, $x=3\ln\left(\frac{e}{3}\right)\rightarrow u=3$, οπότε $I=\int_{x_1}^{3} uf'(u)du$ και το

$$A=\int_{x_1}^{3} f(x)dx+\int_{x_1}^{3} uf'(u)du=\int_{x_1}^{3}\left[f(x)+xf'(x)\right]dx=\left[xf(x)\right]_{x_1}^{3}=3f(3)=9\ln\left(\frac{e}{3}\right).$$