ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5 – ΕΥΘΕΙΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Οι παράλληλες ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, ενώ οι κάθετες ευθείες έχουν αντιθετοαντίστροφους συντελεστές διεύθυνσης, **εφόσον αυτοί ορίζονται**. Προσέξτε ότι οποιαδήποτε ευθεία της μορφής x=αριθμός, είναι κάθετη σε οποιοδήποτε ευθεία της μορφής y=αριθμός, ενώ όλες οι ευθείες που είναι κατακόρυφες (x=αριθμός) είναι παράλληλες μεταξύ τους παρόλο που δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής τους.
2. Αν γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο διέρχεται μια ευθεία, ας πούμε το (x_o , y_o), τότε οι ευθείες που διέρχονται από αυτό έχουν εξισώσεις: $y - y_o = \lambda(x - x_o)$ ή $x = x_o$.

   Αν όμως γνωρίζουμε την κλίση της λ, τότε η ευθεία εκφράζεται ως $y = \lambda x + \beta$. Επιλέγουμε τη μορφή ώστε να υπάρχει ένας μόνο άγνωστος κάθε φορά.
3. Για να βρω το σημείο τομής δύο ευθειών, λύνω το σύστημά τους.
4. Για να βρω τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες, θέτω όπου x=0 και λύνω ως προς y : Έτσι βρίσκω σημείο τομής με ψψ΄. Ομοίως, θέτοντας όπου y=0 και λύνοντας ως προς x βρίσκω το σημείο τομής με τον άξονα χχ΄ .
5. Για να βρω το συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς μια γνωστή ευθεία (ε), βρίσκω την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε), έστω (ζ) , στη συνέχεια το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) , έστω Μ, και προσδιορίζω το ζητούμενο συμμετρικό Α΄ γνωρίζοντας πως το Μ είναι το μέσον του τμήματος ΑΑ΄ .
6. Οι ευθείες που σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες έχουν κλίση που είναι ίση με 1 ή με -1, αφού αυτές είναι οι τιμές της εφαπτομένης των 45° ή των 135° .
7. Αν ένα άγνωστο σημείο Μ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση y=λx+β, τότε το σημείο αυτό θεωρούμε ότι έχει συντεταγμένες Μ(x, λx+β).
8. Για να βρω τη γωνία δύο ευθειών, θεωρώ δύο διανύσματα που να είναι παράλληλα προς κάθε μια από τις δύο ευθείες και βρίσκω τη γωνία των διανυσμάτων με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου και των μέτρων τους.
9. Κάθε ευθεία της μορφής Ax+By+Γ=0 είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\vec{v}$ με συντεταγμένες $\vec{v} = (B, -A)$ ή $(-B, A)$. Μέσω των διανυσμάτων προτιμούμε να λύνουμε ασκήσεις που αναφέρονται σε παραλληλία ή καθετότητα ζεύγους ευθειών που δίνονται με παράμετρο. Το ίδιο κάνουμε και όταν θέλουμε να βρούμε τη γωνία δύο ευθειών.
10. Για να βρω την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών, παίρνω ένα τυχαίο σημείο πάνω στη μία από αυτές (δίνω αυθαίρετα μια «βολική» τιμή στο χ και βρίσκω μια τιμή του y) και στη συνέχεια βρίσκω την απόσταση του σημείου από την άλλη ευθεία με τον τύπο.
11. Για να βρω τη μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών, δίνω αυθαίρετα μια τιμή στο x και βρίσκω το y και για τις δύο ευθείες: Δηλαδή έχω βρει δύο σημεία Α, Β που ανήκουν σε κάθε μία από τις δύο παράλληλες. Στη συνέχεια βρίσκω το μέσον Μ του Α, Β και γράφω την ζητούμενη εξίσωση που είναι μια ευθεία που περνά από το Μ και έχει το ίδιο λ με τις δύο παράλληλες.
12. Αν θέλω να βρω το σταθερό σημείο από το οποίο περνάει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών, υπάρχουν δύο τρόποι:

    α. Γράφω την εξίσωση ως πολυώνυμο της παραμέτρου και ζητώ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή όλοι οι συντελεστές του και ο σταθερός του όρος να είναι μηδέν.

    β. Δίνω δύο τιμές στην παράμετρο («βολικές», ξέρετε εσείς!) και προκύπτουν δύο ευθείες.

www.bakouros.gr

Λύνω το σύστημά τους και βρίσκω το υποψήφιο σταθερό σημείο. Στη συνέχεια πρέπει η αρχική εξίσωση να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του υποψήφιου σημείου.

13. Για να βρω τη διχοτόμο της γωνίας δύο τεμνόμενων ευθειών, θεωρώ ένα σημείο Μ(x,y) της ζητούμενης διχοτόμου και ζητώ οι αποστάσεις του από τις πλευρές να είναι ίσες – από δω προκύπτουν δύο εξισώσεις, δηλαδή οι διχοτόμοι των δύο γωνιών , αμβλείας και οξείας. Αν είστε περίεργοι για το ποια είναι ποια, πάρτε ένα συγκεκριμένο σημείο (δηλαδή δώστε τιμή στο χ) πάνω σε μια από τις δύο αρχικές ευθείες και βρείτε την απόστασή του από τις δύο διχοτόμους. Η μικρότερη απόσταση αντιστοιχεί στην διχοτόμο της οξείας γωνίας.
14. Αν δίνεται μια εξίσωση με δύο μεταβλητές υψωμένες στο τετράγωνο και ζητείται να βρούμε το ζεύγος των ευθειών που αντιπροσωπεύει, τη θεωρούμε ως τριώνυμο με μεταβλητή το y (ή το χ, ότι προτιμάτε) και βρίσκουμε τις δύο λύσεις: Η κάθε μία από αυτές αντιπροσωπεύει και μια ευθεία. Προσοχή: Η διακρίνουσα του τριωνύμου που προκύπτει είναι πάντα τέλειο τετράγωνο. Κάποιες φορές , μπορούμε να βρούμε τις δύο ευθείες παραγοντοποιώντας ή χρησιμοποιώντας διαφορά τετραγώνων στην αρχική εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας

i. Περνά από το Α(-2,3) και είναι παράλληλη στον χ΄χ.
ii. Περνά από το Α(-2,3) και είναι παράλληλη στον ψ΄ψ.
iii. Περνά από το Α(-2,3) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=5.
iv. Περνά από το Α(-2,3) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(0,4)$.
v. Περνά από το Α(-2,3) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta}=(4,0)$.
vi. Περνά από το Α(-2,3) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(1,5)$.
vii. Περνά από το Α(-2,3) και σχηματίζει γωνία 45° με τον χ΄χ.
viii. Περνά από το Α(-2,3) και σχηματίζει γωνία 135° με τον χ΄χ.
ix. Περνά από τα σημεία Α(-2,3) και Β(-2,5).
x. Περνά από τα σημεία Α(-2,3) και Γ(4,3).
xi. Περνά από τα σημεία Δ(2,-2) και Ε(4,6).
xii. Είναι παράλληλη της y=2x και περνά από το Δ(2,-2).
xiii. Είναι κάθετη της y=3x-1 και περνά από το σημείο Ε(4,6).

2. Δίνονται τα σημεία Α(2,0) , Β(3,3) και Γ(-1,5) τα οποία δεν είναι συνευθειακά.
i. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
ii. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓΔ.
iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ.

3. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση y=x+1 και το σημείο Α(-2,3). Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία.

4. α. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: y=2x+4 και y=2x-6. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλής τους.
β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) τα οποία απέχουν 2 μονάδες από την ευθεία με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

5. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: y=2x και y=x-6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τις τέμνει σε σημεία Α, Β ώστε το σημείο Μ(1,1) να είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ. Στη συνέχεια να βρείτε και τα σημεία Α, Β.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, γνωρίζουμε ότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση y=3x-6 , η κορυφή Α είναι η Α(2,0) , η διάμεσος ΒΜ έχει εξίσωση x=3y-7 και η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση y=x+2. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

7. α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, γνωρίζουμε ότι η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση x=3y+1 , η διχοτόμος της γωνίας Α έχει εξίσωση y=x-3 και η κορυφή Β(1,0). Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ .

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Μ(-4,3) και σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

9. α. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 5 = 0,\ x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αυτή περιγράφει ζεύγος ευθειών.
β. Δίνεται η εξίσωση: $2y^2 - (x+8)y - x^2 - x + 6 = 0,\ x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το ζεύγος των ευθειών που εκφράζει.

10. Δίνονται οι γραμμές με εξισώσεις: $\alpha x + (\alpha - 1)y - 2 = 0,\ \alpha x + (2\alpha + 1)y - 3 = 0$.
α. Να βρείτε το α ώστε να είναι παράλληλες.
β. Να βρείτε το α ώστε να είναι κάθετες μεταξύ τους.

11. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: x-2y+3=0 και x+3y-4=0. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

12. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: 3x-4y=0 και 5x+12y-3=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν. Ποια από τις δύο είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχημάτισαν;

13. Δίνεται η οικογένεια γραμμών C : $(\alpha^2 - 2\alpha - 3)x + (\alpha^2 - 1)y - \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$
α. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η γραμμή C είναι ευθεία.
β. Να βρείτε – αν υπάρχει – το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της C.
γ. Να βρείτε το α ώστε η ευθεία C να είναι : i. Παράλληλη στον χχ΄ ii. Παράλληλη στον yy΄
δ. Να βρείτε το α ώστε η ευθεία C να σχηματίζει γωνία 45° με τον οριζόντιο άξονα.

14. Δίνονται τα σημεία: Μ(α-1, 2α+3) και Κ(α+1,-5-3α), $\alpha \in \mathbb{R}$.
α. Να βρείτε τις ευθείες πάνω στις οποίες κινούνται τα σημεία Μ και Κ , έστω ε_1 , ε_2 αντίστοιχα καθώς και το σημείο τομής τους.
β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι ε_1 , ε_2 .
γ. Δίνεται το σημείο Α(0,-2). Να βρείτε σε ποια από τις δύο ευθείες ανήκει καθώς και την απόστασή του από την άλλη.

15. Δίνεται η γραμμή: $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + \lambda(x - y) + 2\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$
α. Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.
β. Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες να έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία $y = x + 3$
γ. Αν λ=4 και Α(-1, 1) είναι σημείο της μιας από τις δύο παράλληλες ευθείες, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις τετμημένες δύο σημείων Β και Γ πάνω στην άλλη παράλληλη ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται να είναι ίσο με $\sqrt{2}$ τ.μ.α.

16. Δίνονται τα πλοία με συντεταγμένες $\Pi_1(t+2, t+1)\ \kappa\alpha\iota\ \Pi_2(14-2t, 3t-7)$, $t \geq 0$ καθώς και το λιμάνι Λ(5,4).
α. Να βρείτε τις ευθείες πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία, καθώς και το σημείο στο οποίο

τέμνονται οι τροχιές τους.
β. Να ελέγξετε αν τα δύο πλοία θα συγκρουστούν.
γ. Να βρείτε πόσο θα απέχουν τα δύο πλοία όταν το ένα από αυτά «πιάσει» λιμάνι.
δ. Να βρείτε πόσο κοντά στο λιμάνι Λ θα βρεθεί τα πλοίο που δεν περνά από το Λ.

17. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y=\lambda+1 \\ (\lambda-1)x+(\lambda-2)y=\lambda+2 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για οποιαδήποτε τιμή του λ.
β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των ευθειών.
γ. Να δείξετε ότι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο τομής των ευθειών σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

18. Έστω η οικογένεια γραμμών με εξίσωση: $(2a^2+a+1)x-(a^2+3)y-a+5=0,\ a\in\mathbb{R}.$
α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού α.
β. Να βρείτε ποια από τις ευθείες της οικογένειας περνά από το (0,0).
γ. Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της οικογένειας.
δ. Η ευθεία y=3x-1, ανήκει σε αυτές;
ε. Να βρείτε αν υπάρχει ευθεία της οικογένειας παράλληλη στην y=2x.
στ. Να βρείτε αν υπάρχει ευθεία της οικογένειας που να σχηματίζει γωνία 45° με τον χχ΄ .

19. Να βρείτε το συμμετρικό Α΄ του σημείου Α(-3,2) ως προς την ευθεία $y=-x+4$. Στη συνέχεια να βρείτε σημείο Κ της ευθείας που να απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Β(1,-2). Ποιο είναι το εμβαδόν του ΑΑ΄ΒΚ;

20.Έστω τα λιμάνια Λ(0,0) , Μ(9,13) και το πλοίο «Θ.Ε.Π.Π» του οποίου οι συντεταγμένες είναι (t+6, 3t+4), t ο χρόνος σε ώρες, $t\in[0,4]$.
α. Να βρείτε τη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Λ στην αρχή της παρατήρησης καθώς και την εξίσωση κίνησής του.
β. Να βρείτε αν το πλοίο πλησιάζει ή απομακρύνεται από το λιμάνι Λ.
γ. Να βρείτε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι Μ.
δ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του πλοίου, θεωρώντας ότι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
ε. Να πείτε σε ποια ευθεία πορεία πρέπει να κινηθεί το πλοίο μετά την πάροδο των τεσσάρων ωρών για να κινηθεί προς το λιμάνι Λ.
στ. Αν η κίνησή του αυτή γίνει με την ίδια ταχύτητα, να βρείτε πόσες ώρες μετά θα «δέσει» στο λιμάνι Λ.

21. Έστω ορθογώνιο παρ/μο ΟΑΒΓ με Ο(0,0), Α(1,2), Β(κ, λ), Γ(μ, ν), ΟΓ=2ΟΑ και μ>0.

a. Να δείξετε ότι μ=-2ν.
b. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.
c. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιες.
d. Ένα κινητό Μ έχει συντεταγμένες $(4-\frac{1}{2}t,\frac{2t}{3}-2),\ t\ \sigma\varepsilon\ \omega\rho\varepsilon\varsigma,\ t\geq 0.$

Να βρείτε από ποια κορυφή ξεκίνησε, σε ποια κατευθύνεται και πόσο χρόνο θα διαρκέσει η μετατόπισή του.

22.Τα πλοία «S1» και «S2» έχουν συντεταγμένες που δίνονται από τις σχέσεις: S1(2t+3,3t-5) και S2(15-t, 15-2t), t σε ώρες, $t\in[0,5]$.

a. Να βρείτε τις εξισώσεις κίνησης κάθε πλοίου.

b. Να βρείτε που και πότε θα συναντηθούν.
c. Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση και των δύο είναι ευθύγραμμη ομαλή, να βρείτε ποιο από τα δύο κινήθηκε με τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

Αν ένας φάρος βρίσκεται στο σημείο Φ(8,3), να δείξετε ότι σε κάποια χρονική στιγμή τα δύο πλοία βρέθηκαν σε ίση απόσταση από αυτόν και να βρείτε την απόσταση αυτή.

23. Ένας ρόμβος ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές του Α και Γ πάνω στην ευθεία y=x και τις άλλες δύο πάνω στην ευθεία y=-x, ενώ το κέντρο του είναι το Ο(0,0). Αν οι διαγώνιές του έχουν μήκη $\text{ΑΓ} = 8\sqrt{2}$ $\kappa\alpha\iota$ $\text{ΒΔ} = 6\sqrt{2}$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του, καθώς και τις εξισώσεις των πλευρών του.

24. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κορυφή Α(1,1) και διαγώνιες που δίνονται από τις εξισώσεις x+4y-12=0 και 3x-2y-1=0. Αν γνωρίζετε ότι η κορυφή Δ βρίσκεται στον άξονα yy΄ , να βρείτε:
α. Τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.
β. Τις εξισώσεις των πλευρών του.
γ. Την απόσταση της κορυφής Α από την πλευρά ΓΔ.
δ. Το εμβαδόν του.

25. Δίνονται οι ευθείες ε_1, ε_2 με εξισώσεις:
$(\lambda+1)x + 2\lambda y - 2 = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $(\lambda+2)x + (\lambda-5)y + 8 = 0$, αντίστοιχα.
α. Να βρείτε το λ ώστε οι δύο ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους.
β. Για την πιο μεγάλη από τις τιμές του λ που βρήκατε, να γράψετε τις εξισώσεις των δύο ευθειών και να βρείτε το σημείο τομής τους.
γ. Η ευθεία ψ=2, τέμνει τις ευθείες του παραπάνω ερωτήματος και σχηματίζει τρίγωνο μαζί τους. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν.

26. Ένας Φάρος εκπέμπει φωτεινές ακτίνες που δίνονται από την οικογένεια ευθειών με εξίσωση: $(\lambda-1)x + (\lambda-2)y - \lambda = 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$. Δίνονται ακόμα οι θέσεις τριών πλοίων Α(2,2), Β(3,-1) και Γ(-2,3).
α. Να βρείτε τη θέση του φάρου Φ.
β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων που περνούν από τα τρία πλοία.
γ. Να βρείτε ποιο από τα πλοία Α και Β βρίσκεται πλησιέστερα στην ακτίνα που ενώνει το φάρο με το πλοίο Γ.
δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τετράπλευρου που ορίζεται από τα τρία πλοία και το φάρο Φ.

27. Τριγώνου ΑΒΓ δίνεται η κορυφή Α(2,-1) , η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΒΓ είναι η $x + y - 3 = 0$ και η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμεσος ΒΜ είναι η $2x + y = 0$. Να βρείτε:
α. Την κορυφή Β και την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.
β. Την κορυφή Γ και το σημείο Μ.
γ. Την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΓ.

28. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2xy - k(x + y + 2k) = 0,\ k \in \mathbb{R}^*$.
α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων και να βρείτε τις εξισώσεις.
β. Να προσδιορίσετε την τιμή του k για τις οποίες οι ευθείες απέχουν $d = 3\sqrt{2}$.

γ. Για k=2, να βρείτε τη μεσοπαράλληλο των δύο παραπάνω ευθειών.
δ. Να βρείτε ποιο σημείο και ποιας από τις τρεις ευθείες είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

29. Σε τρίγωνο ΑΒΓ , γνωρίζουμε ότι την κορυφή Α(1,2) , τη διχοτόμο ΑΔ με εξίσωση y=x+1, την κορυφή Β(0,-1) και την εξίσωση της πλευράς ΒΓ που είναι η y=2x-1.
α. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και το σημείο Γ.
β. Να βρείτε σημείο Ζ ώστε το ΑΒΓΖ να είναι παραλληλόγραμμο, καθώς και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

30. Δίνεται η οικογένεια γραμμών με εξίσωση: $2\alpha x+(\alpha-1)y-5\alpha+1=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ και σημείο Μ(3,-2).
α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.
β. Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες αυτές οι ευθείες.
γ. Να βρείτε την ευθεία της οικογένειας η οποία διέρχεται από το Μ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες.
δ. Να βρείτε ποιες ευθείες της οικογένειας σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

16002. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,- 2) και Γ(5, 2) . Αν το σημείο $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι Β(1,- 1) .
β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

18236. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(- 1, 5) και Β(2, 1) . Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y=-x+4$ και $\varepsilon_2: y=-\frac{1}{2}x+2$ αντίστοιχα, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0).
β) Να βρείτε:
i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ
ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

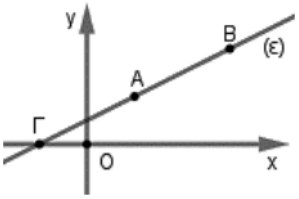
18351. Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:
α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.
β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.
γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ.

21662. Δίνεται η ευθεία ε: $-x+y-2=0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).
α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

www.bakouros.gr

β) Να βρείτε:
i. την εξίσωση της ευθείας ε΄ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε.
ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε΄.
iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε.

20868. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε).

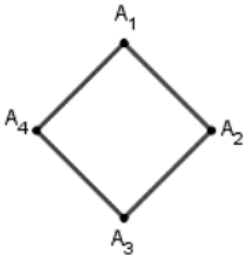


α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε).
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

21162. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,-6) . Να βρεθούν:
α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

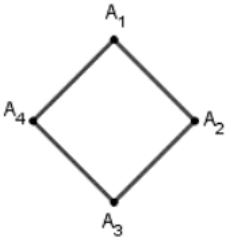
21964. Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:
α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).
β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y=-x+2$.
γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1).

22047. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;
β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_2}{\lambda_4}=2$.

22049. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;
β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1\cdot\lambda_2+\lambda_2\cdot\lambda_3+\lambda_3\cdot\lambda_4+\lambda_4\cdot\lambda_1=-4$.

22071. Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1).
ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3).
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ.

22092. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,4). Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x-2y+5=0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y=x+2$.
α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες Δ(−1,1).
β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

www.bakouros.gr

14970. Δίνεται η ευθεία $y=\lambda(x-2)+\lambda-2,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda=1$ και όταν $\lambda=2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο Μ των δυο ευθειών. Έστω $M(1,\ -2)$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από το Μ.

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

14978. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) ,Β(3,3) .

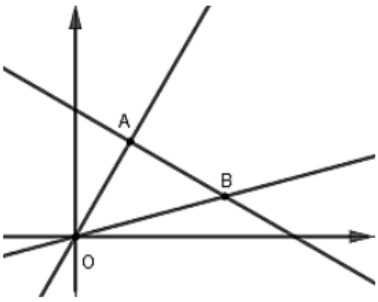
α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

15029. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A\left(1,\sqrt{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1\right)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

15275. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

www.bakouros.gr

16003. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha : (\alpha-4)x-2\alpha y+\alpha+4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

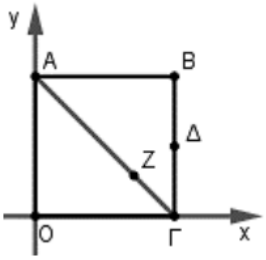
α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν α = 0 και όταν α = 1 και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ.
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ.
γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
i. Να αποδείξετε ότι $0<\alpha<4$.
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει (ΟΑ)= 2(ΟΒ).

17078. Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση $y=-\alpha x+5\alpha$.
ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $\alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.
iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22173. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.



α) Να βρείτε:
i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ.
β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

www.bakouros.gr

18568. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $Γ(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.

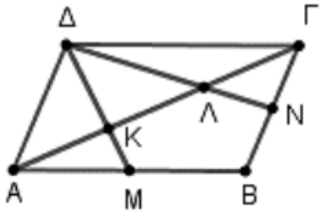
β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y΄y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο Ε, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε.

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AΔ} = 2\overrightarrow{ΔB}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EΓ}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

22065. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $Γ(10,4)$, $Δ(2,4)$. Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ενώ Κ και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔΜ και ΔΝ την διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΓ, ΔΜ, ΔΝ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ.

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

www.bakouros.gr