

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΠ4 -2425 (Έως και ρυθμό μεταβολής)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  ισούται με  $1/x$ . (8 μονάδες)

A2. Να διατυπώσετε τον κανόνα της αλυσίδας. (3 μονάδες)

A3. Δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$ , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα». Να τη χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή (1 μονάδα) και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας (3 μονάδες).

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος»:

α. Η εφαπτομένη μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σε κάποιο σημείο  $a$ , έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

β. Η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^x$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

γ. Αν οι  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε και  $f'(x) \geq g'(x)$ .

δ. Αν  $x_0$  ένας πραγματικός αριθμός με  $x_0 \neq 0$  ισχύει ότι:  $(-\sqrt{x_0})' = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

ε. Μια συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $a$ , δέχεται εφαπτομένη στο  $a$ .

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία γνωρίζουμε ότι η ευθεία  $y=2x+1$  είναι εφαπτομένη της στο  $x_0=1$ .

B1. Να αποδείξετε ότι  $f'(1) = 2$  και  $f(1) = 3$  (6 μονάδες)

B2. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h}$  (9 μονάδες)

B3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g$  με τύπο:  $g(e^{x-1}) = f^2(\ln x + 1) - f(\sqrt{x})$ ,  $x > 0$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο  $x_0=1$  (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln(x+1)$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ . Το σημείο  $A(a, f(a))$ ,  $a > 0$ , κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  ενώ η προβολή  $B$  του σημείου  $A$  στον οριζόντιο άξονα κινείται με ταχύτητα 2μον/sec. Ονομάζουμε  $M$  το σημείο τομής της εφαπτομένης στο  $A$  με τον οριζόντιο άξονα.

Γ1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  ως συνάρτηση του  $a$ . (5 μονάδες)

Κάποια χρονική στιγμή το σημείο  $B$  βρίσκεται στη θέση  $(e-1, 0)$ . Εκείνη τη χρονική στιγμή να βρείτε:

Γ2. Την ταχύτητα κίνησης του  $M$  πάνω στον  $\chi\chi'$ . (10 μονάδες)

Γ3. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $MOA$ , ( $O$  η αρχή των αξόνων) (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = \eta\mu x - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ1. i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση  $y=-x-1$  είναι εφαπτόμενη της γραφική παράστασης της συνάρτησης. (8 μονάδες)

ii. Να δικαιολογήσετε ότι η ευθεία  $y=-x-1$  εφάπτεται της συνάρτησης  $f$  σε άπειρα σημεία. (7 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο  $x_0$ ,  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  ώστε η εφαπτομένη σε αυτό να διέρχεται από το σημείο  $B(0,2)$ . (10 μονάδες)