

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε ορίζεται η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g : **(Μονάδες 3)**
- A2.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} και έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} , τότε η σύνθεση $(f \circ f)$ είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} ». Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» **(Μονάδα 1)** και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. **(Μονάδες 3)**
- A3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι άξονας συμμετρίας των f και f^{-1} **(Μονάδες 8)**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
- α. Μια 1-1 συνάρτηση σε ένα διάστημα A είναι και γνήσια μονότονη στο A .
- β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} , τότε και η σύνθεσή τους είναι ορισμένη πάντα στο \mathbb{R} .
- γ. Η προβολή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης στον κατακόρυφο άξονα είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- δ. Μια άρτια συνάρτηση δεν είναι ποτέ 1-1.
- ε. Για μια περιττή συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι το 0 περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού της, ισχύει πάντοτε $f(0)=0$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ και $g(x) = \ln x - \ln(1-x)$

- B1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους και να εξετάσετε αν είναι ίσες. **(Μονάδες 4+4=8)**
 Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση h με τύπο: $h(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$
- B2.** i. Να βρείτε την συνάρτηση $\varphi(x) = (h \circ f)(x)$ **(Μονάδες 9)**
 ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $\varphi(x)$. **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + 2\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της. **(Μονάδες 3+7)**
- Γ2.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι κάτω από την ευθεία $y=x$ για $x>0$ **(Μονάδες 7)**
- Γ3.** Να δείξετε ότι $f(\ln x + x) \geq 3$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

$$f(x) = x^3 - e^{2-x} \quad \text{και} \quad g^3(x) = \frac{e^2}{e^{g(x)}} + x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- Δ1.** Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το $f^{-1}(7)$. **(Μονάδες 4+2=6)**
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνήσια αύξουσα. **(Μονάδες 6)**
- Δ3.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 9 - x$ **(Μονάδες 7)**
- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση: $(2-x)^3 - (x^3 + 2)^3 = e^x - e^{-x^3}$ **(Μονάδες 6)**