ΕΠ2 - 2425

A1 $a \to ii$, $b \to iii$, $c \to ii$, $d \to iii$, $e \to i$, $f \to vi$, $g \to v$, $h \to i$

A2 Ψευδής. Αν, για παράδειγμα, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ και $g(x) = \frac{-1}{(x-1)^4}$
τότε $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1} g(x) = -\infty$ αλλά $f(x)+g(x) = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^4}$
συνεπώς $\lim_{x \to 1} (f(x)+g(x)) = -\infty \neq 0$.

A3 α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1 Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και έχει τύπο: $\varphi(x) = \sqrt{x} - 2 + 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$, ενώ για την $h(x)$ απαιτούμε επιπλέον $g(x) \neq 0 \Rightarrow 1 \neq \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x \neq 4$ άρα το π. ορισμού της h είναι το $(0,4) \cup (4,+\infty)$ και ο τύπος της:

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}, \quad x \in (0,4) \cup (4,+\infty)$$

B2 Για την $\varphi(x) = \sqrt{x} - 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$, για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$
$\Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, $\frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x_1}} < -\frac{2}{\sqrt{x_2}}$ συνεπώς $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$,
άρα $\varphi \nearrow$ στο $(0, +\infty)$ άρα είναι αντ/μη.
Ομοίως, η $h(x)$ είναι γν. αύξουσα στα $(0,4)$ και $(4,+\infty)$ συνεπώς και η h είναι αντ/μη.

B3 $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$ αφού $\frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ αφού $\sqrt{x} > 0$ όταν $x \to 0$.

$\lim_{x \to 0^+} h(\sqrt{x}) = \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Για $x=0$, $f^3(0)+3f(0)=0 \Rightarrow f(0)\left(f^2(0)+3\right)=0 \Rightarrow$ $f(0)=0$ αφού $\left(f^2(0)+3\right)>0$. Επίσης $f(x)\left(f^2(x)+3\right)=2\ln(x+1)$ και αφού $f^2(x)+3>0$, η $f(x)$ έχει ίδιο πρόσημο με την ποσότητα $2\ln(x+1)$ δηλ. $f(x)>0$ $\forall x>0$ ενώ $f(x)<0$ αν $x\in(-1,0)$.

Γ2 Έστω η συνάρτηση $g(x)=x^3+3x$ η οποία είναι γν. αύξουσα. Αν $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow 2\ln(x_1+1)<2\ln(x_2+1)$ άρα $f^3(x_1)+3f(x_1)<f^3(x_2)+3f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))$ $\underset{g\nearrow}{\Rightarrow}$ $f(x_1)<f(x_2)$, συνεπώς $f \nearrow$.

Γ3 Είναι $f(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{f^2(x)+3} \Rightarrow |f(x)|=\dfrac{2|\ln(x+1)|}{f^2(x)+3}\leq\dfrac{2|\ln(x+1)|}{3}$ αφού $f^2(x)\geq 0$, συνεπώς: $-\dfrac{2|\ln(x+1)|}{3}\leq f(x)\leq\dfrac{2|\ln(x+1)|}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\pm\dfrac{2|\ln(x+1)|}{3}=0$ άρα (κρ. παρ.) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+x$, $x\in(0,+\infty)$ η οποία είναι – προφανώς – γν. αύξουσα. Τότε η δοσμένη ισότητα γράφεται:
$\ln f(x)+f(x)=x+e^x \Rightarrow g(f(x))=g(e^x) \underset{1-1}{\overset{g}{\Rightarrow}} f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Δ2 α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(e^x+x^2)-2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{x^2}\right)$ (*).

Έστω $y=\dfrac{e^x+x^2}{x^2}$. $\lim\limits_{x\to 0^+}y=+\infty$ άρα (*) $=\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+\eta\mu e^x}\overset{:e^x}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\eta\mu e^x}{e^x}}$. Όμως, $\left|\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}\right|\leq\dfrac{1}{e^x} \Rightarrow$

$-\dfrac{1}{e^x}\leq\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}\leq\dfrac{1}{e^x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ άρα (ΚΠ)

Δ2 (συνέχεια) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημe^x}{e^x} = 0$ συνεπώς

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{ημe^x}{e^x}} = 1.$$

Δ3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - \alpha^x}{e^{x+1} + \alpha^{x+1}}$. Αν $\alpha < e$ το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \left[1 - \left(\frac{\alpha}{e}\right)^x\right]}{e^x \left[e + \alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{e}\right)^x\right]} = \frac{1}{e}$$

Αν $\alpha > e$, το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha^x \left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x - 1\right]}{\alpha^x \left[e \cdot \left(\frac{e}{\alpha}\right)^x + \alpha\right]} = \dfrac{-1}{\alpha}$

Αν $\alpha = e$, το όριο είναι μηδέν.