

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , για τις οποίες ισχύει η σχέση:
 $f(g(x)) = 3x - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.
- Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών όλο το \mathbb{R} .
- Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, να λύσετε την ανίσωση:
 $g(\ln x) < g(-x + 1)$
- Αν η $g(x)$ έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι και η f είναι 1-1. (Μη θεωρήσετε δεδομένη τη μονοτονία της f από το γ ερώτημα).

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:
 $(f \circ f)(x) = f(x) + 3 - x$, $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το $f(3)$.
- Να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνήσια φθίνουσα.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(6 - f(|x - 2| - 1)) = 3$
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f^{-1}(x) = x + 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^3 + ax + 4$, όπου η γραφική παράσταση της $f \circ f$ τέμνει τον γγ' στο σημείο με τεταγμένη 80.

- Να αποδείξετε ότι $a=3$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
- Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(9 - x^2)) + x - 2 - f(x + 2) = 0$
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(|x| - 1) - 18) < f^{-1}(80)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x) = e^x + \frac{1 - e^x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 5\sin x - 4, \quad x \in [0, \pi]$$

- Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει ελάχιστη τιμή το 1.
- Να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $g(x)=1$.
- Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{e^x + e^{-x} + 3}{5} = \sin x$
- Να λύσετε την εξίσωση: $e^{|x|-1} + e^{1-|x|} = 2$

5. Δίνεται η γνήσιως μονότονη συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:
 $e^{f(1)} + 2f(1) - 1 = 0$ και $\ln(f(2)) + 3f(2) - 3 = 0$.

- Να υπολογίσετε τα $f(1)$ και $f(2)$.

β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x + x) < 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$, $x \in [0, 4]$

α. Να βρείτε την $(g \circ g)(x)$.

β. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $(g \circ f)(x) = 2x - 1$

γ. Αν για μια συνάρτηση $h(x)$ ισχύει ότι $(g \circ h)(x) = x$, μπορούμε να πούμε ότι $h(x) = g(x)$:

7. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$(f \circ f)(x) = x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

β) Να αποδείξετε ότι: $f^{-1}(x) = f(x) + 2$

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία $y=x$.

δ) Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [1, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει ακρότατο;

β) Να βρείτε την f^{-1} και να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} .

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 2x - \sqrt{x+1} = 1$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - \sqrt[3]{x+6} = 6$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) να λύσετε την ανίσωση: $f(|x| - 15) < -33$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{\ln 2\}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής της f^{-1} με τους άξονες.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(\frac{6-2e}{e-2} + f(\ln x)\right) = 1$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-2}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ f)^2(\ln x) - (f \circ f)(\ln x) - 2 < 0$

γ) Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε: $f(g(x)) = x + 2$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x} - e^{x-1} - 1, x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) Να βρείτε το $f^{-1}(-e)$, καθώς και τη μονοτονία της f^{-1} .

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x) = x + 1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\sqrt{1+3x^2} - \sqrt{x^2+4}}{(1+\sqrt{1+3x^2}) \cdot (1+\sqrt{x^2+4})} = \frac{e^{\sqrt{x^2+4}} - e^{\sqrt{1+3x^2}}}{2}$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^{x-2} - 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln 2x) < 2$

δ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(1 + f^{-1}(x-2)) = 0$

ε) Να λυθεί η εξίσωση: $|x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right), g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

α) Να ελέγξετε αν $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (g \circ f)(\ln x)$ στη συνέχεια να

λύσετε την εξίσωση

$h(\ln x) + h(x) - 1 = 0$.

γ) Να βρείτε συνάρτηση $t(x)$ τέτοια ώστε: $f(t(x)) = g(f(\ln x))$

15. Να επινοήσετε κατάλληλες συναρτήσεις, να τις μελετήσετε ως προς την μονοτονία και με τη βοήθειά τους να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(2x^2 + 3)^3 - 3(x^2 + x + 5) < (x^2 + x + 5)^3 - 3(2x^2 + 3)$

β) $e^{x^2} + \ln(x^2 + 2) < e^{\sqrt{x}} + \ln(\sqrt{x} + 2)$

16. α) Να λυθεί η ανίσωση: $(2x-1)^2 < \ln\left(\frac{1+e^{4x}}{1+e^{4x^2}}\right) + 1$

β) Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ώστε να ισχύει η σχέση: $f(x^2 + 1) + f(e^x) > f(2x) + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ και $g(x) = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους και να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} για το οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση h με τύπο: $h(x) = (\ln x - 1)^2$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να βρείτε την συνάρτηση φ με τύπο: $\varphi(x) = (f \circ h)(x)$ και να αποδείξετε ότι αν

$x \in (1, e^2)$ ο τύπος της φ γίνεται $\varphi(x) = \frac{1}{2 - \ln x}$.

γ) Να βρείτε τη μονοτονία της $\varphi(x)$ καθώς και το όριο: $\lim_{x \rightarrow e^2} \varphi(x)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x - \eta\mu x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq -1$, για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(e^x - 1) = \frac{3e^x - 5}{e^x - 4}$, $x \neq \ln 4$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Έστω $f(x) = \frac{3x-2}{x-3}$, $x \neq 3$

β) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(f(f(x))) \geq -3(f(f(x)) - 1)$, αν $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$f(x) = x^2 + 2x - 1$, $x \in [-1, +\infty)$ και $g(x) = \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής των συναρτήσεων f και f^{-1} .

γ) i. Να βρείτε τη συνάρτηση h όπου $h(x) = (f \circ g)(x)$

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $h(x) < 2g(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$

21. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sin x - \eta\mu x - 4x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

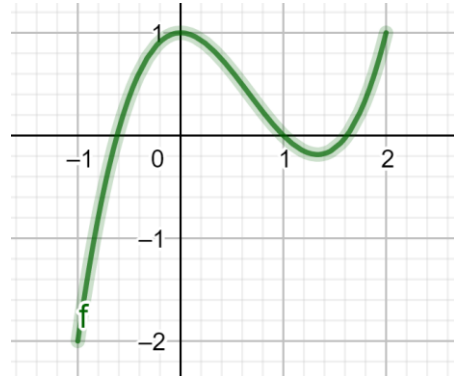
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να υπολογίσετε το $f^{-1}(-\pi)$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\pi + \sin x \leq \eta\mu x + 4x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(-x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

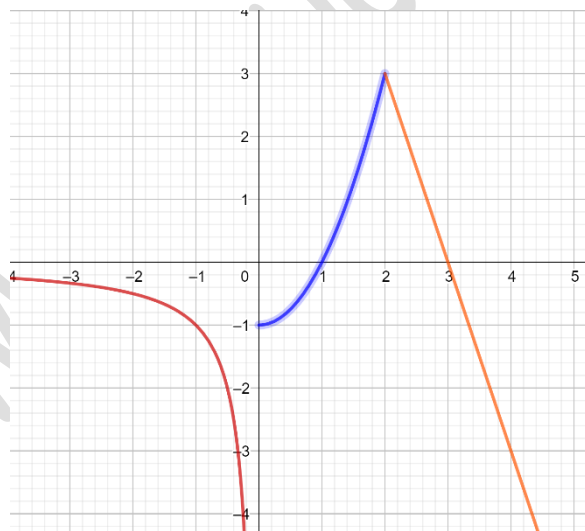
22. Για τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.
- Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\ln a$, $a > 0$, για τις διάφορες τιμές του a .
- Τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=1$.

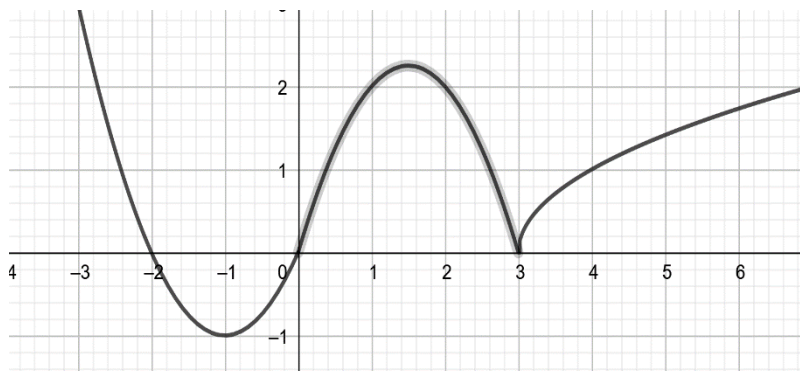


23. Για τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$
- Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = -1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -1$ για $x < 0$.
- Το πλήθος των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y=x$ (διχοτόμο $1^{0^u} - 3^{0^u}$).



24. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



25. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{a+x+1}\right)$, $a > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(a-1, \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $a=2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-3, 2)$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(2x) - f(1-x)$

γ) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g , αν γνωρίζετε ότι η f είναι ορισμένη στο $(-3, 2)$.

ii. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης g .

26. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να βρείτε την αντίστροφή της

γ) Να αποδείξετε ότι $f(1+e^x) > f(1-x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}, \quad x \in [1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση h , όπου $h(x) = (f \circ g)(x)$ και να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=0$ είναι άξονας συμμετρίας για την συνάρτηση h .

β) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης h .

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{2-\sin^2 x} - \sin x < \sqrt{2-\eta\mu^2 x} - \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

28. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι περιττή και να βρείτε τη μονοτονία της πρώτα για x θετικό και στη συνέχεια για κάθε x πραγματικό.

β) Να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -x$

δ) Έστω η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$(g \circ f)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$