

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ3 - 2425 (ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΑ ΟΡΙΑ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η $y=x$ είναι άξονας συμμετρίας για μια 1-1 συνάρτηση f και την αντίστροφή της.

Θεωρείστε ότι η f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. (8 μονάδες)

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. (3 μονάδες)

A3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x)>0$ για x κοντά στο x_0 , όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το όριο της όταν το x τείνει στο x_0 , τότε το όριο της είναι θετικός αριθμός». Να τον χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(1+3 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Για δύο συναρτήσεις με το ίδιο πεδίο ορισμού A , η σύνθεση τους έχει επίσης πεδίο ορισμού το A .

β. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g είναι πάντα τόσα όσα και οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

γ. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{|x|}} = 0$

δ. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0 , τότε ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

ε. Αν το $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, τότε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να υπολογίσετε τα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{3 - \sqrt{x+7}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-3)^2 \eta\mu \frac{1}{x^2 - 9} \right]$ (12 μονάδες)

B2. Με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση, να υπολογίσετε - αν υπάρχουν - τα ζητούμενα όρια:

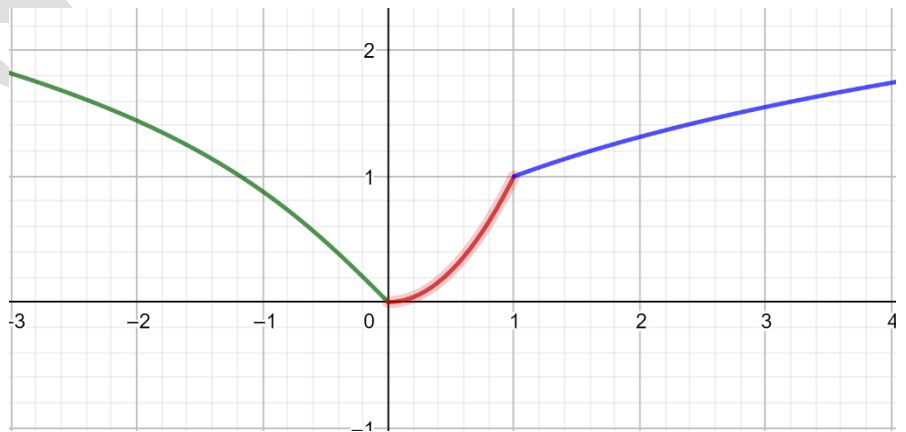
a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(a)x^3 - 2x^2 + 1)$, $a \in \mathbb{R}^*$

(3+3+4+3 μονάδες)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - (a+1)x^2 + \beta x + 6}{x - 2} = 5$ (6 μονάδες)

Γ2. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\kappa x + 2 - \sqrt{4x^2 + \lambda x - 1}) = 5$ (6 μονάδες)

Γ3. i. Αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - m^x}{e^x + m^x} = 1$, τότε να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης με τύπο :

$$f(x) = \ln(m^x + 1) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3+4 μονάδες)

ii. Για $m=e$, να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{με} \quad f(x) > 0 \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

όρια:

Δ1. a. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)-2}{x-2}$ c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(f(x)-2)}{x-1}$ (2+3+4 μονάδες)

Δ2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2-f^2(x)| - |f(x)-1|}{|f^2(x)+3f(x)-2|}$ (3+4 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ (9 μονάδες)