ΕΠ3 - 2425

Α3. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $f(x)=\frac{1}{x}$, τότε $f(x)>0 \ \forall x>0$

αλλά το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Α4. α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{3-\sqrt{x+7}}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+6-8)\,(3+\sqrt{x+7})}{(9-x-7)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\cdot\sqrt[3]{x+6}+4\right)}=-\frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=-\frac{1}{4}$

c. Επειδή $\left|(x-3)^2\cdot ημ\frac{1}{x^2-9}\right|\le(x-3)^2 \iff$

$-(x-3)^2\le(x-3)^2\cdot ημ\frac{1}{x^2-9}\le(x-3)^2$ και $\lim\limits_{x\to3}(x-3)^2=0$

από Κρ. παρ. προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to3}(x-3)^2\cdot ημ\frac{1}{x^2-9}=0$

Β2. a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ c. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{f(x)-1}$ Δεν υπάρχει.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\alpha)x^3-2x^2+1\right)=-\infty$ γιατί $f(\alpha)>0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτω $g(x)=\frac{x^3-(\alpha+1)x^2+\beta x+6}{x-2}\iff g(x)(x-2)=x^3-(\alpha+1)x^2+\beta x+6$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}g(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to2}\left[x^3-(\alpha+1)x^2+\beta x+6\right]\Rightarrow 0=8-4\alpha-4+2\beta+6$

$\Rightarrow 2\alpha-\beta=5 \Rightarrow \beta=2\alpha-5$

Για $\beta=2\alpha-5$: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-(\alpha+1)x^2+2\alpha x-5x+6}{x-2}=5$

Με Horner:

1	$-\alpha-1$	$2\alpha-5$	6	$x=2$
	2	$-2\alpha+2$	-6	
1	$-\alpha+1$	-3	0	

συνεπώς:

$\lim\limits_{x\to2}\left[x^2+(1-\alpha)x-3\right]=5\Rightarrow 4+2-2\alpha-3=5\Rightarrow\boxed{\alpha=-1}$

και αφού $\beta=2\alpha-5\Rightarrow\boxed{\beta=-7}$

Γ2 $\lim_{x\to-\infty} x\left[k+\frac{2}{x}+\sqrt{4+\frac{\lambda}{x}-\frac{1}{x^2}}\right]=5 \Rightarrow (-\infty)(k+2)=5$ άρα

υποχρεωτικά $k=-2$. Για $k=-2$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-2x+2-\sqrt{4x^2+\lambda x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+4-8x-4x^2-\lambda x+1}{-2x+2+\sqrt{4x^2+\lambda x-1}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-8-\lambda+\frac{5}{x}\right)}{-2x\left[1-\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{\lambda}{4x}-\frac{1}{4x^2}}\right]}=\frac{-8-\lambda}{2}=5 \Rightarrow -\lambda=18 \Rightarrow \lambda=-18$$

άρα τελικά $k=-2$, $\lambda=-18$.

Γ3 i) Αν $m>e$: $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\left(3-\left(\frac{m}{e}\right)^x\right)}{e^x\left(1+\left(\frac{m}{e}\right)^x\right)}=3$, μη δεκτό.

Αν $m<e$: $\lim_{x\to-\infty}\frac{m^x\left[3\left(\frac{e}{m}\right)^x-1\right]}{m^x\left[\left(\frac{e}{m}\right)^x+1\right]}=-1$, μη δεκτή.

Για $m=e$: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{2e^x}=1$, άρα πρέπει $m=e$.

ii) Για $m=e$, $f(x)=\ln(e^x+1)-x=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln(1+e^{-x})$, $x\in\mathbb{R}$

- Έστω $x_1<x_2 \Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα $f\searrow$, συνεπώς η f αντιστρέφεται.

Θέτω $y=\ln(1+e^{-x}) \Rightarrow 1+e^{-x}=e^y \Rightarrow e^{-x}=e^y-1$, με $e^y-1>0 \Rightarrow y>0$

$\Rightarrow -x=\ln(e^y-1) \Rightarrow x=-\ln(e^y-1)$ συνεπώς

$f^{-1}(x)=-\ln(e^x-1)$ με $x\in(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $h(x)=\frac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1} \Rightarrow f(x)=(x-1)h(x)+\sqrt{x+3}$

άρα $\lim_{x\to1}f(x)=2$.

b. Θέτω $y=x-1 \Rightarrow x=y+1$, οπότε $\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-2}{x-2}=$

$$\lim_{y\to1}\frac{f(y)-2}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{(y-1)h(y)+\sqrt{y+3}-2}{y-1}=\lim_{y\to1}\left[h(y)+\frac{y+3-4}{(y-1)(\sqrt{y+3}+2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ημ(f(x)-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{ημ(f(x)-2)}{f(x)-2}\cdot\dfrac{f(x)-2}{x-1}\right]$ (★)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ημ(f(x)-2)}{f(x)-2} \overset{y=f(x)-2}{=} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{ημ\,y}{y} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1} \overset{(b)}{=} \dfrac{1}{2}$

Άρα, το (★) ισούται με $1/2$.

Δ2 α. Έστω $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$ και $h(x) > 0$ άρα

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{h(x)} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 0$ και $h(x) > 0$.

b. Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $2 - f^2(x) < 0$, $f(x) - 1 > 0$ και

$f^2(x) + 3f(x) - 2 > 0$ καθώς $x \to +\infty$.

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f^2(x) - 2 - f(x) + 1}{f^2(x) + 3f(x) - 2} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f^2(x)\left[1 - \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f^2(x)}\right]}{f^2(x)\left[1 + \frac{3}{f(x)} - \frac{2}{f^2(x)}\right]} = 1$

Δ3 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(1+h)-2}{h} - \dfrac{f(1-h)-2}{h}\right]$ (★)

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-2}{h} \overset{y=1+h}{=} \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)-2}{y-1} \overset{Δ1(b)}{=} \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-2}{h} \underset{y=1-h}{=} \lim\limits_{y\to 1} -\dfrac{f(y)-2}{y-1} = -\dfrac{1}{2}$

άρα τελικά $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.