

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠ2 -2425 (ΕΩΣ ΤΑ ΟΡΙΑ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αντιστοιχίσετε τα όρια της 1^{ης} στήλης με τις απαντήσεις της 2^{ης} στήλης.

- | | |
|--|----------------|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta \mu \frac{3}{x}$ | i. Δεν υπάρχει |
| b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu 3x}{x}$ | ii. 3 |
| c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 3x}{x}$ | iii. 0 |
| d. $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu 3x$ | iv. 1 |
| e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta \mu x$ | v. $+\infty$ |
| f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ | vi. $-\infty$ |
| g. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ | |
| h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$ | |

(8 μονάδες)

A2. Δίνεται η πρόταση: «Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 0$

Να την χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2+5=7 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος»

α. Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

γ. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$

δ. Όταν λέμε ότι μια πρόταση ισχύει για τη συνάρτηση f «κοντά στο x_0 », θα πρέπει η συνάρτηση f να ορίζεται οπωσδήποτε σε ένωση διαστημάτων της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

ε. Αν το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ υπάρχει, τότε υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $x \in [0, +\infty)$ και $g(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

B1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ και $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (8 μονάδες)

B2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις φ και h είναι αντιστρέψιμες. (8 μονάδες)

B3. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{h(x)}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(h(x))$ (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $f^3(x) + 3f(x) = 2\ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$.

Γ1. Να βρείτε το $f(0)$ και το πρόσημο της $f(x)$. (3+5=8 μονάδες)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. (8 μονάδες)

Γ3. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \leq \frac{2|\ln(x+1)|}{3}$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (4+5=9 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει η σχέση: $\ln f(x) + f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (7 μονάδες)

Έστω ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια: a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(f(x) + x^2) - 2\ln x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x) + \eta \mu f(x)}$ (10 μονάδες)

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - a^x}{f(x+1) + a^{x+1}}$, $a > 0$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a . (8 μονάδες)