

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Εκτός από τις κλασσικές, θυμηθείτε κυρίως τις δύο παρακάτω :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \text{ αλλά και την γενικότητα:}$$

$$a^v - b^v = (a - b)(a^{v-1} + a^{v-2}b + a^{v-3}b^2 + \dots + ab^{v-2} + b^{v-1}), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{N}.$$

2. ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ορισμοί - σχέσεις - συμπεράσματα)

i. Ισχύουν: $|a| = \begin{cases} -a, & \text{αν } a < 0 \\ a, & \text{αν } a \geq 0 \end{cases}$, $|a|^2 = a^2$, $-|a| \leq a \leq |a|$.

ii. Επίσης: $|ab| = |a| \cdot |b|$, $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, αλλά $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Στην τελευταία σχέση, τα ίσον ισχύουν αν οι a, b είναι ετερόσημοι ή ομόσημοι.

iii. Ακόμα, αλλάζουμε πρόσημα (όλα!) όποτε θέλουμε: $|a| = |-a|$, $|a - b| = |b - a|$

iv. Προσοχή!!!! $\sqrt[v]{a^v} = |a|$ για κάθε v άρτιο φυσικό.

v. $|x| + |y| = 0 \Rightarrow x = 0$ και $y = 0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν :
 $|x| + |y| \leq 0$ ή $x^{2v} + y^{2v} = 0$, δηλαδή $x = y = 0$.

vi. $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$, όπου $a > 0$.

vii. $|f(x)| \geq \theta \Leftrightarrow f(x) \geq \theta$ ή $f(x) \leq -\theta$.

3. ΡΙΖΕΣ

Προσοχή στην περίπτωση όπου έχουμε: $\sqrt[v]{a^k}$. Αν το k είναι περιττός, τότε το a είναι απαραίτητα μη

αρνητικός και μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή: $\sqrt[v]{a^k} = a^{\frac{k}{v}}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Αν το k είναι άρτιος, τότε δεν πρέπει απαραίτητα το a να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, προκειμένου να βγάλουμε τη ρίζα από το συμβολισμό:

$$\sqrt[v]{a^k} = \begin{cases} (-a)^{\frac{k}{v}}, & \text{αν } a < 0 \\ a^{\frac{k}{v}}, & \text{αν } a \geq 0 \end{cases} \quad \text{Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις γνωστές ιδιότητες, αλλά και τις}$$

δύο πιο περίεργες:

$$\sqrt[k]{\sqrt[v]{a}} = \sqrt[kv]{a} \quad \text{και} \quad \sqrt[v]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kv]{a} \quad \text{ενώ} \quad a \cdot \sqrt[v]{b} = \sqrt[v]{a^v \cdot b} \quad \text{για κάθε } a, b \geq 0, \quad v, k \in \mathbb{N}^*.$$

4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0°	90°	180°	270°
ημ	0	1	0	-1
συν	1	0	-1	0
εφ	0	-	0	-
σφ	-	0	-	0

i. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1, \quad \epsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}, \quad \sigma\phi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}, \quad \epsilon\phi\chi \cdot \sigma\phi\chi = 1, \quad 1 + \epsilon\phi^2\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}, \quad 1 + \sigma\phi^2\chi = \frac{1}{\eta\mu^2\chi}$$

ii. Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων:

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\alpha \Rightarrow \chi = 2\kappa\pi + \alpha \quad \acute{\eta} \quad \chi = 2\kappa\pi + \pi - \alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \alpha$$

$$\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\alpha \quad \acute{\eta} \quad \sigma\phi\chi = \sigma\phi\alpha \Rightarrow \chi = \kappa\pi + \alpha, \quad \acute{\omicron}\pi\upsilon\sigma \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Προσοχή στις 2 περιπτώσεις: } \eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi, \quad \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

iii. Αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο

Όταν έχεις $\pi/2$ ή $3\pi/2$, αλλάζεις τριγωνομετρικό, αν έχεις π ή 2π , τον αφήνεις ίδιο. Για το πρόσημο, κρίνεις από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεσαι. Παραθέτω μερικούς τύπους, όχι για παπαγαλία, αλλά για να μάθετε τον τρόπο κοιτώντας το 1° μέλος, να μπορείτε να «βγάλετε» το 2° και όχι να το θυμηθείτε.

$$\eta\mu(\pi - \chi) = \eta\mu\chi, \quad \sigma\upsilon\nu(\pi - \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi, \quad \epsilon\phi(\pi + \chi) = \epsilon\phi\chi, \quad \sigma\phi(\pi - \chi) = -\sigma\phi\chi$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi, \quad \eta\mu(-\chi) = -\eta\mu\chi, \quad \epsilon\phi(-\chi) = -\epsilon\phi\chi, \quad \sigma\phi(-\chi) = -\sigma\phi\chi, \quad \text{αλλά } \sigma\upsilon\nu(-\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \sigma\upsilon\nu\chi, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \eta\mu\chi, \quad \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right) = -\sigma\phi\chi, \quad \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \epsilon\phi\chi$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right) = \eta\mu\chi, \quad \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \chi\right) = -\sigma\upsilon\nu\chi, \quad \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \chi\right) = -\sigma\phi\chi, \quad \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right) = -\epsilon\phi\chi$$

iv. Πώς λύνουμε τριγωνομετρικές ανισώσεις

Θα πρέπει να γνωρίζουμε (με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεών τους) τα διαστήματα μονοτονίας για τις συναρτήσεις ημ, συν, εφ. Δείτε μερικά παραδείγματα:

α. Να λυθεί στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η ανίσωση $\eta\mu\chi \leq \frac{1}{2}$. Βλέπουμε ότι το $\frac{1}{2}$ είναι το ημίτονο των 30° και διακρίνω

περιπτώσεις: Αν $\chi \leq \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\eta\mu \nearrow} \eta\mu\chi \leq \frac{1}{2}$ ενώ αν $\chi > \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\eta\mu \nearrow} \eta\mu\chi > \frac{1}{2}$, άρα $\chi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

β. Να λυθεί στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η ανίσωση $\eta\mu\chi \leq \sigma\upsilon\nu\chi$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\sigma\upsilon\nu\chi$ (θετικό στο πρώτο

τεταρτημόριο) οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$\varepsilon\varphi x \leq 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x \leq \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{4} \text{ αφού η } \varepsilon\varphi x \text{ είναι γνήσια αύξουσα, συνεπώς } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

5. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

- i. $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, f γνήσια αύξουσα αν $a > 1$, γνήσια φθίνουσα αν $0 < a < 1$.
- ii. $f(x) = \ln x$, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f γνήσια αύξουσα, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^{\text{κάτι}} = e^{\ln(\text{κάτι})} = \text{κάτι}$
 $\ln x + \ln y = \ln(xy)$, $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, $\ln x^k = k \ln x$ για $x, y > 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

i. Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

$$ax^2 + bx + \gamma = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4a\gamma, \text{ για } \Delta \geq 0 \text{ είναι: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{b}{a}$$

$ax^2 + b = 0$. Λύνουμε ως προς x^2 , τη φέρνουμε στη μορφή $x^2 = \theta$ και εφόσον $\theta > 0$, τότε $x = \pm\sqrt{\theta}$.

Αν $\theta < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, ενώ αν $\theta = 0$ η λύση είναι $x = 0$.

ii. Εξισώσεις 3^{ου} και άνω βαθμού.

Παραγοντοποιούμε και μετατρέπουμε την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων έως δεύτερου βαθμού ή κάνουμε σχήμα Horner.

7. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

i. Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης, μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάξουμε τη φορά, μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό, επίσης χωρίς να αλλάξουμε τη φορά. Αν όμως διαιρέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά. Με σύμβολα:

Αν $a > b$, τότε $a + \gamma > b + \gamma$, $a - \gamma > b - \gamma$, και εφόσον $\gamma > 0$, ισχύει ότι

$$a\gamma > b\gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\gamma}, \text{ ενώ, αν } \gamma < 0, \text{ είναι } a\gamma < b\gamma \text{ και } \frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}.$$

ii. Μεταξύ των μελών δύο ανισώσεων, σε καμιά περίπτωση δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση. Επιτρέπεται, εφόσον μιλάμε για ομοιόστροφες ανισώσεις, η πρόσθεση κατά μέλη και - με την προϋπόθεση ότι όλα τα μέλη είναι θετικές ποσότητες - ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη. Συμβολικά:

Αν $a > b$ και $\gamma > \delta$ τότε $a + \gamma > b + \delta$ και, εφόσον a, b, γ, δ θετικοί, $a \cdot \gamma > b \cdot \delta$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις: Αν a, b ομόσημοι, τότε $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ και

iii. αν a, b θετικοί και n φυσικός, $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

Τέλος, αν n περιττός, τότε $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

iv. Προσοχή στο εξής: Αν $x > 1$, τότε $x^y > x$, ενώ, αν $0 < x < 1$ ισχύει ότι $x^y < x$.

v. Για να λύσουμε ανίσωση 2^{ου} βαθμού, θυμόμαστε τις τρεις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, ίδιο με του a . Οπότε η απάντηση στην ανίσωση είναι πως ισχύει για κάθε x πραγματικό ή πως είναι αδύνατη.

- Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο γράφεται σε μορφή ταυτότητας, οπότε είναι $(κx + λ)^2 \geq 0$ για κάθε x .

- Αν $\Delta > 0$ ή βρούμε δύο ρίζες (με κοινό παράγοντα, διαφορά τετραγώνων ή «μάτι») τότε πριν απαντήσουμε στην ανίσωση, φτιάχνουμε πινακάκι, όπου για τιμές του x μεταξύ των ριζών το τριώνυμο είναι ετερόσημο του a και ομόσημο του a παντού αλλού.

8. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ

Μιλάμε για ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)}$.

i. Για την μορφή:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \cdot B(x) > 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}. \text{ Εφόσον τα } A(x), B(x) \text{ είναι μέχρι δευτέρου βαθμού,}$$

φτιάχνουμε πινακάκι και συμπληρώνουμε τα πρόσημα. Αν είναι μεγαλύτερου βαθμού παραγοντοποιούμε ή κάνουμε Horner για να μειώσουμε το βαθμό.

ii. Για την μορφή:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)} \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)} > 0. \text{ Κάνουμε ομώνυμα, οπότε το φέρνουμε στη}$$

μορφή $\frac{E(x)}{Z(x)} > 0$ και ακολουθούμε την πρώτη περίπτωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενο τις παρακάτω παραστάσεις:

a. $8x^3 - 27 =$ b. $x^6 - 8 =$ c. $x^3 - 64 =$ d. $27x^3 + y^3 =$

e. $(2x - 1)^2 - 16x^2 =$ f. $(3x + 2)^2 - (2x - 1)^2 =$

Απαντήσεις: α. $(2x - 3) \cdot (4x^2 + 6x + 9)$ β. $(x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$ γ. $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

δ. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ ε. $(2x - 1 - 4x)(2x - 1 + 4x) = (-1 - 2x)(6x - 1)$

στ. $(3x + 2 - 2x + 1)(3x + 2 + 2x - 1) = (x + 3)(5x + 1)$

2. Να συμπληρώσετε με τις κατάλληλες παραστάσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αρχική	Συζυγής	Τελικά
$\sqrt{x^2 + 4}$		
$\sqrt[5]{x^2}$		
$\sqrt{x+3} - 1$		
$2 - \sqrt{x-4}$		
$\sqrt{x^2 + x} - x$		
$\sqrt[3]{x} - 2$		
$\sqrt[3]{x+8} - 2$		

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις-ανισώσεις

α. $|2x - 3| = 1$ β. $|2x - 3| = 2|x + 1|$ γ. $|1 - 4x| = x + 2$
 δ. $|1 - 2x| \leq 3$ ε. $|3 - x| \geq 2$ ς. $|3x + 2| \leq |x + 2|$

α. $x = 2$, $x = 1$ β. $x = \frac{1}{4}$ γ. $x = 1, x = -\frac{1}{5}$ δ. $-1 \leq x \leq 2$ ε. $x \leq 1$ ή $x \geq 5$ ς. $-1 \leq x \leq 0$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $x^2 - 2x + 5 > 0$ β. $x^2 - 2x + 5 < 0$ γ. $x^2 + 4x \geq 0$ δ. $x^2 - 3x \leq 0$
 ε. $2x - 4x^2 \leq 0$ ς. $x^2 - 4x + 4 < 0$ ζ. $4x^2 + 12x + 9 > 0$ η. $x^2 + 4 > 0$
 θ. $x^2 - x - 2 < 0$ ι. $4x^2 - 9 \geq 0$ κ. $x^2 - 7 < 0$ λ. $12 - x^2 < 0$

Απαντήσεις: α. $x \in \mathbb{R}$ β. αδύνατη γ. $x \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ δ. $x \in [0, 3]$

ε. $x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ ς. αδύνατη ζ. $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ η. $x \notin \mathbb{R}$

θ. $x \in (-1, 2)$ ι. $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$ κ. $x \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ λ. $(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$

5. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε α πραγματικό αριθμό:

α. $ax^2 - (a+2)x + a \leq 0$ (Απ: $a \in (-\infty, -\frac{2}{3}]$) β. $x^2 - (3a-2)x + (a-1)^2 \geq 0$ (Απ: $a \in [0, \frac{4}{5}]$)

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $\eta\mu(3\pi - \alpha) =$ β. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$ γ. $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

δ. $\sigma\phi(\chi - 5\pi) =$ ε. $\eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$ ς. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - 3\pi) =$

Απαντήσεις: α. $\eta\mu\alpha$ β. $-\eta\mu\alpha$ γ. $-\sigma\phi\alpha$ δ. $\sigma\phi\chi$ ε. $-\sigma\upsilon\nu\alpha$ ς. $-\sigma\upsilon\nu\alpha$

7. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2 < x < 3$ και $1 < y < 4$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $3x - 2y$ β. $x^2 - y^2$ γ. $10 - xy$ δ. $\frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ε. $y^2 - \frac{12}{x}$

Απαντήσεις: α. $-2 < 3x - 2y < 7$ β. $-12 < x^2 - y^2 < 8$ γ. $-2 < 10 - xy < 8$

δ. $\frac{5}{3} < \frac{2}{x} + \frac{4}{y} < 5$ ε. $-5 < y^2 - \frac{12}{x} < 12$

8. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{x^3 - 7x + 6}{(x+1)^2} \geq 0$ β. $\frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 8} \leq 0$ γ. $\frac{2x-1}{x+2} < \frac{2x+3}{x-1}$

Απαντήσεις: α. $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2]$ β. $x \in (-\infty, -2] \cup (2, 3]$ γ. $x \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

9. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

α. $\eta\mu 2x = 0$ ($x = \frac{\kappa\pi}{2}$) β. $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = 0$ ($x = 2\kappa\pi + \pi$) γ. $\epsilon\phi 3x = 1$ ($x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$)

δ. $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$ ($x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$) ε. $\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{1}{2}$ ($x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$)

στ. $\eta\mu 3x = -\sigma\upsilon\nu 3x$ ($x = \frac{\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$) ζ. $\eta\mu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$)

η. $\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$ ($x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$) θ. $\eta\mu 3x = -\sigma\upsilon\nu x$ ($x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$)

10. Να λύσετε τις παρακάτω ομάδες εξισώσεων - ανισώσεων:

α.
$$\begin{cases} x^2 - |x| - 2 = 0 \\ e^{2x} - e^x - 2 = 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 2 = 0 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} x^2 - |x| - 2 \leq 0 \\ e^{2x} - e^x - 2 \geq 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 2 > 0 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x^3 - 7x + 6 = 0 \\ \ln^3 x - 7\ln x + 6 = 0 \\ e^{3x} - 7e^x + 6 = 0 \end{cases}$$

δ.
$$\begin{cases} x^3 - 7x + 6 < 0 \\ \ln^3 x - 7\ln x + 6 \leq 0 \\ e^{3x} - 7e^x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

ε.
$$\begin{cases} (x-2)^2 + 2|x-2| = 0 \\ (e^x - 1)^2 + 2|e^x - 1| = 0 \\ (\ln x + 2)^2 - 2|\ln x + 2| = 0 \end{cases}$$

φ.
$$\begin{cases} (x-2)^2 + 2|x-2| \leq 0 \\ (e^x - 1)^2 + 2|e^x - 1| > 0 \\ (\ln x + 2)^2 - 2|\ln x + 2| \leq 0 \end{cases}$$

Απαντήσεις:

a. $|x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$, $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$, $x=\frac{1}{e}$ ή $x=e^2$ b. $x \in [-2, 2]$, $x \in [\ln 2, +\infty)$, $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e^2, +\infty)$

c. $x=-3$ ή $x=1$ ή $x=2$, $x=\frac{1}{e^3}$ ή $x=e$ ή $x=e^2$, $x=0$ ή $x=\ln 2$

d. $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$, $x \in (0, \frac{1}{e^3}] \cup [e, e^2]$, $x \in (-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty)$

e. $x=2$, $x=0$, $x=\frac{1}{e^2}$ ή $x=1$ ή $x=\frac{1}{e^4}$ f. $x=2$, $x \in \mathbb{R}^*$, $x \in [\frac{1}{e^4}, 1]$

11. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{2x-1}{x^2-x-2} \leq 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 2)$

β. $\frac{x+3}{x^2-3x+2} > 0$ Απαντ.: $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

γ. $\frac{x-4}{x^2-x} \geq -1$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -2] \cup (0, 1) \cup [2, +\infty)$

δ. $\frac{x^2-x-2}{x^2-1} \geq 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$

ε. $\frac{|x|-2}{x^2-5x+6} \leq 0$ Απαντ.: $x \in [-2, 2) \cup (2, 3)$

12. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2 < x < 3$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι ποσότητες:

α. $-2x - y^2$ Απ: $(-5, 2)$ β. $\frac{3}{x} - \frac{2}{y}$ Απ: $(-1, \frac{1}{2})$ γ. $y^3 - x^2 + 1$ Απ: $(-7, 5)$

13. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $3 < |1-2x| < 5$ ($x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$)

β. $|x^2-3x+1| \leq 1$ ($x \in [0, 1] \cup [2, 3]$)

γ. $e^{2x-1} - e^{x+1} < 0$ ($x \in (-\infty, 2)$)

δ. $\ln^2(x-\ln 2+1) + (e^x-2)^2 \leq 0$ ($x = \ln 2$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2+3x+2}$ b. $f(x) = \frac{1-\ln(1-x)}{x^2-x}$ c. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{\ln x-1}$

$$d. f(x) = \sqrt{2 - \ln 2x} + \sqrt{\ln(x-1)} \quad e. f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2} \quad f. f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$$

$$g. f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{4x + x^2} \quad h. f(x) = \ln(\sqrt{\ln x}) \quad i. f(x) = \sqrt{2 - \ln x} - \sqrt{e^x - 3}$$

$$j. f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3-\ln x}\right) \quad k. f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x - 2} \quad l. f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{|x-3|}} - \sqrt{\frac{x+1}{|x|+1}}$$

Απαντήσεις:

$$a. [2, +\infty) \quad b. (-\infty, 0) \cup (0, 1) \quad c. (0, e) \cup (e, +\infty) \quad d. [2, e^2/2] \quad e. [0, \ln 2] \quad f. (-1, 3)$$

$$g. (-\infty, -4] \cup \{0\} \cup [2, +\infty) \quad h. (1, +\infty) \quad i. [\ln 3, e^2] \quad j. (2, e^3) \quad k. (0, 1/e] \cup [e^2, +\infty)$$

$$l. [2, 3) \cup (3, +\infty)$$