Απαντήσεις ΕΠΙ - 2425

A2. Αληθής. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($f \nearrow$) ενώ $g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2)$. Συνεπώς $(f-g)(x_1) < (f-g)(x_2)$

A3. Λάθος - Λάθος - Σωστό - Λάθος - Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Στη σχέση $f(e^x - 1) = \dfrac{3e^x - 5}{e^x - 4}$, θέτω $y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = y + 1$

συνεπώς $f(y) = \dfrac{3y + 3 - 5}{y + 1 - 4} = \dfrac{3y - 2}{y - 3}$ και αφού $x \neq \ln 4 \Rightarrow e^x \neq 4$
$\Rightarrow e^x - 1 \neq 3$

Είναι $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x - 3}$, $x \neq 3$.

B2. Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x_1 - 2}{x_1 - 3} = \dfrac{3x_2 - 2}{x_2 - 3} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα f είναι 1-1.

Θέτω $y = \dfrac{3x - 2}{x - 3} \Leftrightarrow yx - 3y = 3x - 2 \Leftrightarrow (y-3)x = 3y - 2 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{3y - 2}{y - 3}$ με $y \neq 3$, συνεπώς $A_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\} = A_f$ και

$$f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{x - 3} = f(x).$$

B3. Αφού $f(x) = f^{-1}(x)$, είναι $f(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, $x \neq 3$

οπότε η ανίσωση γράφεται:

$$\ln x \geq -3x + 3, \quad x > 0, \ x \neq 3$$

Θέτω $h(x) = \ln x + 3x - 3$, $h(1) = 0$ και $h(x) \nearrow$ στο $(0,3)$ και στο $(3, +\infty)$ συνεπώς η ανίσωση γράφεται:

$$h(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(1) \Rightarrow x \geq 1$$

άρα, τελικά, $x \in [1, 3) \cup (3, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Είναι $f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$, $x \in [-1, +\infty)$.

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ με $-1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1$

άρα $(x_1+1)^2 < (x_2+1)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ. $f \uparrow$ στο $[-1, +\infty)$.

Θέτω $y = (x+1)^2 - 2 \Rightarrow (x+1)^2 = y+2$ με $y \geq -2$ άρα

$|x+1| = \sqrt{y+2}$ και για $x \geq -1$, $x = \sqrt{y+2} - 1$ συνεπώς

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} - 1$, $x \in [-2, +\infty)$

Γ2. Αφού f, f^{-1} γν. αύξουσες τα σημ. τομής τους βρίσκονται πάνω στην $y = x$, συνεπώς: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ και ρίζες της

οι: $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (Μη δεκτή, $x \geq -1$) και

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (Δεκτή)

Μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Γ3. i. $A_{f\circ g} = \left\{ \begin{matrix} x \in A_g \\ \text{και} \\ g(x) \in A_f \end{matrix} \right\}$ Όμως, $\ln x - 1 \geq -1 \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ και $x > 0$ άρα $A_h = [1, +\infty)$.

Επίσης, $f(g(x)) = f(\ln x - 1) = \ln^2 x - 2$, $x \in [1, +\infty)$

ii) $h(x) < 2g(x) \Rightarrow \ln^2 x - 2 < 2\ln x - 2 \Rightarrow \ln^2 x - 2\ln x < 0$

Έστω $\omega = \ln x$. $\omega^2 - 2\omega < 0 \Rightarrow \omega \in (0, 2)$ άρα $0 < \ln x < 2$

$\Rightarrow 1 < x < e^2$ δηλ. $x \in (1, e^2)$.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 4x \quad , \quad x \in [0, \pi/2]$.

Δ1. Η συνάρτηση συν είναι ↘ στο $[0, \pi/2]$ συνεπώς, αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2$ ενώ $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$ και έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \\ -\eta\mu x_1 > -\eta\mu x_2 \\ -4x_1 > -4x_2 \end{array}\right\} \oplus \quad f(x_1) > f(x_2) \text{ άρα } f \searrow \text{ στο } [0, \pi/2] \text{, δηλ. 1-1.}$$

Επίσης αν $f^{-1}(-\pi) = \alpha \rightarrow -\pi = f(\alpha) \Rightarrow f(\pi/4) = f(\alpha)$

άρα $\alpha = \pi/4$ δηλ. $f^{-1}(-\pi) = \pi/4$.

Δ2. $\pi + \sigma\upsilon\nu x \leq \eta\mu x + 4x \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 4x \leq -\pi \Rightarrow$

$f(x) \leq -\pi \overset{f^{-1}\searrow}{\Rightarrow} x \geq f^{-1}(-\pi) \rightarrow x \geq \pi/4$ δηλ.

$x \in [\pi/4, \pi/2]$ (Χρησιμοποίησα ότι η f^{-1} ↘ εφόσον f ↘. Έστω $x_1 < x_2$. Αρκεί νδο $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$.

Έστω $f^{-1}(x_1) \leq f^{-1}(x_2) \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2))$

δηλ. $x_1 \geq x_2$, άτοπο).

Δ3. $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) - \eta\mu(-x) - 4(-x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + 4x$

άρα $f(x) + f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu x$. Η εξίσωση γίνεται: $2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{x^2+4}$.

Όμως, $x^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+4} \geq 2$ ενώ $2\sigma\upsilon\nu x \leq 2$ και λύση μπορεί να υπάρξει μόνο αν $2\sigma\upsilon\nu x = 2$ και $\sqrt{x^2+4} = 2$

δηλ. μοναδική λύση είναι η τιμή $x = 0$.