

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$
- A2.** Δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} και η g είναι γνήσια φθίνουσα στο ίδιο σύνολο, τότε η $f-g$ είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} ». Να τη χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
- α.** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το ίδιο διάστημα A , τότε και η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το ίδιο σύνολο A .
- β.** Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε ισχύει πάντα $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$
- γ.** Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι και 1-1.
- δ.** Τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και f^{-1} βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.
- ε.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνήσια αύξουσες στο \mathbb{R} , τότε και η σύνθεσή τους είναι γνήσια αύξουσα

ΘΕΜΑ Β

Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(e^x - 1) = \frac{3e^x - 5}{e^x - 4}$, $x \neq \ln 4$

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

(4 μονάδες)

Έστω $f(x) = \frac{3x-2}{x-3}$, $x \neq 3$

B2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$ (3+6=9 μονάδες)

B3. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(f(f(x))) \geq -3(f(f(x))-1)$, αν $x \in (0,3) \cup (3,+\infty)$ (12 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $x \in [-1, +\infty)$ και $g(x) = \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. (6+4=10 μονάδες)

Γ2. Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής των συναρτήσεων f και f^{-1} . (6 μονάδες)

Γ3. i. Να βρείτε τη συνάρτηση h όπου $h(x) = (f \circ g)(x)$ (4 μονάδες)

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $h(x) < 2g(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sin x - \eta \mu x - 4x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να υπολογίσετε το $f^{-1}(-\pi)$ (8 μονάδες)

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση: $\pi + \sin x \leq \eta \mu x + 4x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (8 μονάδες)

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(-x) = \sqrt{x^2 + 4}$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (9 μονάδες)