ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΙΟΣ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, για κάθε $x>0$ και $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ **(8 μονάδες)**

Α2. Τι πρέπει να ισχύει ώστε η ευθεία με εξίσωση $x=x_o$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f; Το x_o πως προσδιορίζεται ως πιθανό σημείο στο οποίο υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη; **(2+2 μονάδες)**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat. **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση που είναι γνήσια φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, μπορεί να μην είναι 1-1.

β. Μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό $[\alpha, \beta]$, έχει μέγιστη τιμή το $f(\alpha)$ ή το $f(\beta)$.

γ. Ισχύει ότι: $(x^x)' = x^x(\ln x+1)$ για κάθε $x>0$

δ. Αν f, g δύο συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x))$, τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ και ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x))= \lim\limits_{x\to x_o} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

ε. Αν για μια συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln^2 x + \alpha,\ x \in [1,+\infty)$ και $\alpha > 0$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $\int_{f(1)-1}^{3-f(1)} f(x)dx = 0$ καθώς και η συνάρτηση με τύπο $g(x) = e^{x-1},\ x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι f(1)=2 και α=2 **(6 μονάδες)**

Για α=2:

Β2. Να βρείτε την συνάρτηση h, όπου $h = f\circ g$ και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη. **(8 μονάδες)**

Έστω ότι $h(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \geq 1$

Β3. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h **(6 μονάδες)**

Β4. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις h και h^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{1-x}+x-3,\quad x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι η γραφική της τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε δύο ακριβώς σημεία x_o , x_1 για τα οποία επιπλέον ισχύει ότι: $x_0<1<x_1$ **(6 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της C_f και του xx' και να δείξετε ότι:

$E=\frac{1}{2}(x_1-x_o)(4-x_o-x_1)$ **(7 μονάδες)**

Γ3. Να δείξετε ότι $f(4-x_o)>0$ **(7 μονάδες)**

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2+1)-x^2<f(e^{x^2}+1)-2\ln x,\ \ x\in(0,+\infty)$ **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f συνάρτηση με τύπο: $f(x)=e^x-x\ln x-x-2,\ \ x\in(0,+\infty)$ με $f(2)>0$.

Δ1. Να δείξετε ότι: $e^x-\ln x>2$ για κάθε $x>0$ **(6 μονάδες)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_1 , με $x_1>1$.
(7 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής x_o, με $x_o\in(\frac{1}{2},1)$ και να δικαιολογήσετε ότι $f(x_o)<0$ **(5+2=7 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\le x(f(3)-f(2))+3f(2)-2f(3)$ για κάθε $x\in[2,3]$
(5 μονάδες)