ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = e^{1-x} + x - 3$

Γ1. Νδο η C_f τέμνει τον $x x'$ σε δύο ακριβώς σημεία x_0, x_1 με $x_0<1<x_1$

Γ2. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της C_f και του $x x'$ και νδο

$$E = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(4 - x_0 - x_1)$$

Γ3. Νδο $f(4 - x_0) > 0$

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+1) - x^2 < f(e^{x^2}+1) - 2\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Είναι $f'(x) = 1 - e^{1-x}$. $f'(x) > 0 \iff e^{1-x} < 1 \iff 1-x<0 \iff x>1$

άρα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

η f έχει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1) = -1$

Επίσης, αν $x \in (-\infty, 1] = A_1 \Rightarrow f(x) \in [-1, +\infty) = f(A_1)$

$x \in [1, +\infty) = A_2 \Rightarrow f(x) \in [-1, +\infty) = f(A_2)$

Επειδή το $0 \in f(A_1)$ και $f(A_2)$, υπάρχουν $x_0 \in A_1$ και $x_1 \in A_2$ ώστε

$f(x_0) = f(x_1) = 0$ με $x_0 < 1 < x_1$.

Γ2. $E = \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|\,dx$. Αν $x \in [x_0, 1] \Rightarrow f(x) \in [-1, 0]$ ενώ αν

$x \in [1, x_1] \Rightarrow f(x) \in [-1, 0]$ συνεπώς

$$E = \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx = \left[-e^{1-x} + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{x_1}^{x_0} = -e^{1-x_0} + \frac{x_0^2}{2} - 3x_0 + e^{1-x_1} - \frac{x_1^2}{2} + 3x_1 .$$

Επίσης, $e^{1-x_0} = 3 - x_0$ και $e^{1-x_1} = 3 - x_1$

άρα $E = \cancel{-3} + x_0 + \frac{x_0^2}{2} - 3x_0 \cancel{+3} - x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_1 = \frac{1}{2}(x_0^2 - x_1^2) + 2x_1 - 2x_0 =$

$= \frac{1}{2}(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) - 2(x_0 - x_1) = (x_0 - x_1)\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 - 2\right)$

$= \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(4 - x_0 - x_1)$.

Γ3. Επειδή $x_1 - x_0 > 0$ και $E > 0 \Rightarrow x_0 + x_1 < 4 \Rightarrow 4 - x_0 > x_1$ και

η $f \nearrow$ για τιμές μεγαλύτερες από το x_1 άρα $f(4 - x_0) > 0$.

Γ4. $f(x^2+1) + \ln x^2 < f(e^{x^2}+1) + \ln e^{x^2}$. Έστω $g(x) = f(x+1) + \ln x$.

Είναι $g'(x) = f'(x+1) + \frac{1}{x}$. Για $x>0$, $x+1>0$ άρα $f'(x+1) > 0$

δηλ. $g'(x) > 0$ άρα $g \nearrow$. Η ανίσωση γίνεται:

$g(x^2) < g(e^{x^2}+1) \iff x^2 < e^{x^2} + 1$ που ισχύει για

κάθε $x>0$ αφού $e^x > x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.