ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΑΪΟΣ 24

Α4. Σωστό - Λάθος - Σωστό - Λάθος - Σωστό

Θ.Β

Β1. Επειδή $f(x)=\ln^2 x+\alpha$ είναι $f(x)>0 \ \forall x\in[1,+\infty)$ και συνεπώς το $\int_{f(1)-1}^{3-f(1)} f(x)dx>0$ ή $\int_{f(1)-1}^{3-f(1)} f(x)dx<0$ ανάλογα με το αν $f(1)>2$ ή $f(1)<2$.

Αφού $\int_{f(1)-1}^{3-f(1)} f(x)dx=0$, πρέπει $f(1)-1=3-f(1) \Rightarrow f(1)=2$.

Άρα, $f(1)=2 \Rightarrow \alpha=2$

Β2. Για $\alpha=2$, $f(x)=\ln^2 x+2$. Το $A_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}$ και $g(x)\in[1,+\infty)\}$ δηλ. $e^{x-1}\geq 1 \Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$ άρα $A_{f\circ g}=[1,+\infty)$ και $f(g(x))=f(e^{x-1})=\ln^2(e^{x-1})+2=(x-1)^2+2$, $x\in[1,+\infty)$.

Αφού $h'(x)=2(x-1)>0 \ \forall x>1$ και $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ η $h(x)$ $\nearrow$ δηλ. 1-1.

Β3. Το συν. τιμών της $h(x)$ είναι το $[h(1), \lim_{x\to+\infty} h(x))=[2,+\infty)$ και $y=(x-1)^2+2 \Rightarrow |x-1|=\sqrt{y-2} \Rightarrow x=1+\sqrt{y-2}$ δηλ.

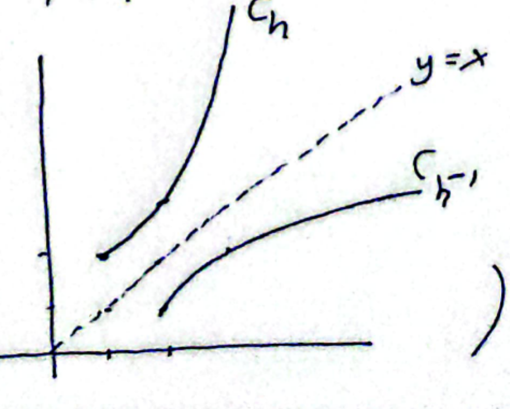
$h^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}$ με $x\in[2,+\infty)$.

Β4. Είναι $h(x)>x \ \forall x\in[1,+\infty)$. Πράγματι, $(x-1)^2+2>x \Leftrightarrow$

$x^2-3x+3>0$ που ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta=-3<0$.

Επειδή οι C_h, $C_{h^{-1}}$ έχουν άξονα συμμετρίας την $y=x$, είναι $h^{-1}(x)<x \ \forall x\in[2,+\infty)$ και συνεπώς οι h, h^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(Γίνεται και με τη γραφική:



)