ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΑΡΤΙΟΣ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f έχει σημείο καμπής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(3 μονάδες)**

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. **(8 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα [α, β] δεν έχει ασύμπτωτες» . Να την χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή (**1 μονάδα**) και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

α) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [α ,β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , δεν έχει απαραίτητα σημείο στο (α, β) στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα.

β) Ο ρυθμός μεταβολής μιας παραγωγίσιμης στο x_0 συνάρτησης , στο σημείο της x_0 είναι πραγματικός αριθμός.

γ) Ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

δ) Μια συνάρτηση η οποία δεν έχει κρίσιμα σημεία , δεν έχει ακρότατα.

ε) Η ασύμπτωτη μιας συνάρτησης, δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις g , h με τύπους: $g(x)=\frac{8(x+1)}{x+4}$, $h(x)=e^x-1$

Β1. Να ορίσετε την συνάρτηση $f=g\circ h$ και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη. **(5 μονάδες)**

Έστω $f(x)=\frac{8e^x}{e^x+3}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f. **(5 μονάδες)**

Β3. Να ελέγξετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της. **(7 μονάδες)**

Β4. Αν k είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της συνάρτησης f να αποδείξετε ότι $k\le 2$. **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

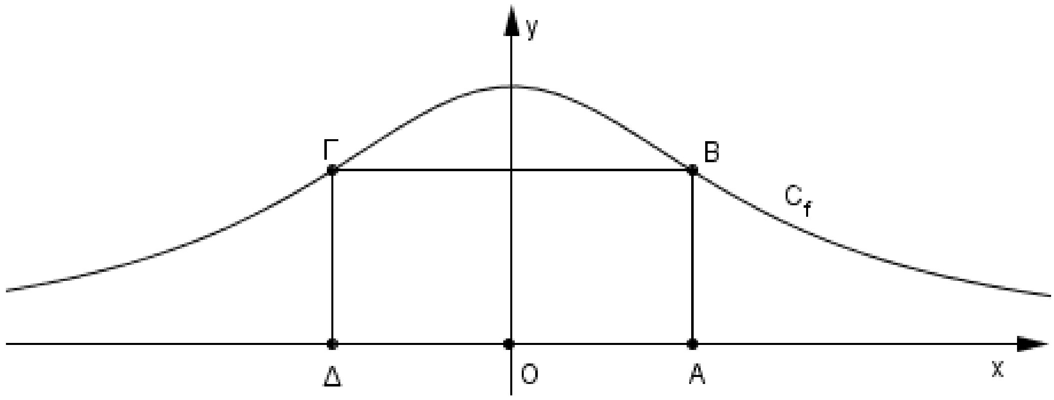
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$και

$$\left(x^2+1\right)f'\left(x\right)+\frac{2x}{x^2+1}=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **(5 Μονάδες)**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

Γ2. Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και



να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α, $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, $\alpha > 0$ . .

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

Γ4. Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι

$\int_0^1 F(x)dx = \ln\sqrt{2}$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x-2)e^x - \dfrac{x^3}{6}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της. (5 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε μοναδικό σημείο x_o του διαστήματος (1,2). (8 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x_o) < 0$ (5 μονάδες)

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση:

$f(\eta\mu^2 x + x^2 + 2) + f(2x^2 + 1) < f(\eta\mu^2 x + x^2 + 1) + f(2x^2 + 2)$ (7 μονάδες)