ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΑΡΤΗΣ 2024

Α3. Ψευδής. Η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$ έχει

κατ/γη ασ/τη την $x=1$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

Α4. Σ - Σ - Λ - Λ - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $A_h=\mathbb{R}$, $A_g=\mathbb{R}-\{-4\}$.

$A_{g\circ h}=\{x\in\mathbb{R}$ και $h(x)\in\mathbb{R}-\{-4\}\}=\mathbb{R}$ αφού $e^x-1\neq -4\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$g(h(x))=\dfrac{8(e^x-1+1)}{e^x-1+4}=\dfrac{8e^x}{e^x+3}$. Η $f(x)=\dfrac{8e^x}{e^x+3}$, $x\in\mathbb{R}$

είναι παρ/μη με $f'(x)=8\,\dfrac{e^x(e^x+3)-e^{2x}}{(e^x+3)^2}=\dfrac{24e^x}{(e^x+3)^2}>0$ άρα

$f\nearrow$ και άρα 1-1.

Β2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8e^x}{e^x+3}=8$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8e^x}{e^x+3}=0$ άρα $f(x)\in(0,8)=A_{f^{-1}}$.

Είναι $y=\dfrac{8e^x}{e^x+3} \Leftrightarrow ye^x+3y=8e^x \Leftrightarrow e^x(y-8)=-3y \Leftrightarrow$

$e^x=\dfrac{3y}{8-y} \Rightarrow x=\ln\left(\dfrac{3y}{8-y}\right)$ άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{3x}{8-x}\right)$, $x\in(0,8)$

Β3. $f''(x)=24\,\dfrac{e^x(e^x+3)^2-e^x\cdot 2(e^x+3)\cdot e^x}{(e^x+3)^4}=\dfrac{24e^x(e^x+3)(e^x+3-2e^x)}{(e^x+3)^4}$

$\Rightarrow f''(x)=\dfrac{24e^x(3-e^x)}{(e^x+3)^3}$. $3-e^x>0 \Rightarrow e^x<3 \Rightarrow x<\ln 3$

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\ln 3} \\ \hline f'' & + & - \\ f & \cup & \cap \end{array}$$

σ. καμπής το $(\ln 3, f(\ln 3))=(\ln 3, 4)$

Β4.

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\ln 3} \\ \hline f'' & + & - \\ f' & \nearrow & \searrow \end{array}$$

Η f' έχει μέγιστο για $x=\ln 3$ την τιμή $f'(\ln 3)=\dfrac{72}{36}=2$ και συνεπώς $f'(x)\leq 2$ δηλ. $\kappa\leq 2$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. $(x^2+1)f'(x)+\frac{2x}{x^2+1}=0 \Rightarrow f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ άρα

$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+1}+c$, $f(0)=1 \Rightarrow c=0$

συνεπώς $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

Γ2. Επειδή $f(-x)=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$ άρα f άρτια, συνεπώς η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον yy'.

Συνεπώς, $A(\alpha,0)$, $B(-\alpha,0)$, $\Gamma\left(-\alpha,\frac{1}{\alpha^2+1}\right)$ και $\Delta\left(\alpha,\frac{1}{\alpha^2+1}\right)$.

Γ3. $E=A\Delta\cdot AB=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ άρα $E(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

$E'(\alpha)=\frac{2(\alpha^2+1)-2\alpha\cdot 2\alpha}{(\alpha^2+1)^2}=\frac{2(1-\alpha^2)}{(\alpha^2+1)^2}$, $\alpha>0$.

	0		1	
E'		+	0	−
E		$\nearrow$		$\searrow$

Μέγιστο για $\alpha=1$ το $E(1)=1$ τ.μ.α.

Γ4. $\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1 x'F(x)\,dx=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 xf(x)\,dx$

$=F(1)-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx=\ln 2-\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 2)=$

$\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=e^x+(x-2)e^x-\frac{x^2}{2}=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=e^x+(x-1)e^x-x=xe^x-x=x(e^x-1)$

		0	
x	−	0	+
e^x-1	−	0	+

συνεπώς $f''(x)>0$ για $x\neq 0$ και 0 μόνο για $x=0$.

Άρα $f'\uparrow$ δηλαδή f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. $f'(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$, η f' συνεχής στο $[1, 2]$ με

$f'(1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f'(2) = e^2 - 2 > 0$ άρα (ΘΒ) υπάρχει $x_0 \in (1,2)$

ώστε $f'(x_0) = 0$. Επίσης, αφού $f' \uparrow$ είναι: για $x > x_0$, $f'(x) > 0$

ενώ για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ συνεπώς:

		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

άρα η f έχει ελάχιστο για $x = x_0$.

Δ3. Αφού $x_0 \in (1,2) \Rightarrow 1 < x_0 < 2$ άρα $(x_0 - 2)e^{x_0} < 0$

και $-\frac{x_0^3}{6} < 0$ συνεπώς $f(x_0) < 0$

Δ4. $f(\eta\mu^2 x + x^2 + 2) - f(\eta\mu^2 x + x^2 + 1) < f(2x^2 + 2) - f(2x^2 + 1)$ (1)

Θέτω $T(x) = f(x+1) - f(x)$, $T'(x) = f'(x+1) - f'(x) > 0$

αφού $f' \uparrow$ συνεπώς $T(x)$ γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η (1) γράφεται: $T(\eta\mu^2 x + x^2 + 1) < T(2x^2 + 1) \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x + x^2 + 1 < 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow$

$|\eta\mu x| < |x|$ η οποία ισχύει για κάθε $x \neq 0$.