

A3. Ψευδής. Η συνάρτηση με νόμο: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ έχει
 κατ'ύλην ασύτη του $x=1$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

A4. $\Sigma - \Sigma - \Lambda - \Lambda - \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $A_f = \mathbb{R}$, $A_g = \mathbb{R} - \{-4\}$.

$A_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) \in \mathbb{R} - \{-4\}\} = \mathbb{R}$ αφού $e^x - 1 \neq -4 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$g(h(x)) = \frac{8(e^x - 1 + 1)}{e^x - 1 + 4} = \frac{8e^x}{e^x + 3}. \quad \text{Η } f(x) = \frac{8e^x}{e^x + 3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι παθητή γα $f'(x) = 8 \frac{e^x(e^x + 3) - e^{2x}}{(e^x + 3)^2} = \frac{24e^x}{(e^x + 3)^2} > 0$ άρα
 $f \nearrow$ και άρα 1-1.

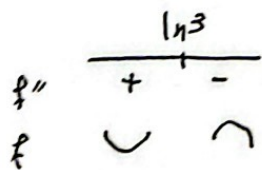
B2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8e^x}{e^x + 3} = 8$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8e^x}{e^x + 3} = 0$ άρα $f(x) \in (0, 8) = A_{f^{-1}}$.

Είναι $y = \frac{8e^x}{e^x + 3} \Leftrightarrow ye^x + 3y = 8e^x \Leftrightarrow e^x(y - 8) = -3y \Leftrightarrow$

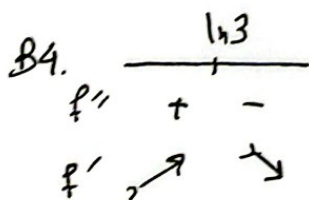
$$e^x = \frac{3y}{8-y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{3y}{8-y}\right) \text{ άρα } f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{3x}{8-x}\right), \quad x \in (0, 8)$$

B3. $f''(x) = 24 \frac{e^x(e^x + 3)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 3) \cdot e^x}{(e^x + 3)^4} = \frac{24e^x(e^x + 3)(e^x + 3 - 2e^x)}{(e^x + 3)^4}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{24e^x(3 - e^x)}{(e^x + 3)^3}. \quad 3 - e^x > 0 \Rightarrow e^x < 3 \Rightarrow x < \ln 3$$



β. άρα γινός το $(\ln 3, f(\ln 3)) = (\ln 3, 4)$



Η f' έχει μέγιστο για $x = \ln 3$ του

τιγής $f'(\ln 3) = \frac{72}{36} = 2$ και συνεπώς

$$f'(x) \leq 2 \quad \text{όρα } K \leq 2.$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. $(x^2+1) f'(x) + \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ άρα

$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1} + c, f(0)=1 \Rightarrow c=0$

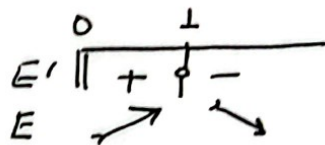
συνεπώς $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Γ2. Είναι $f(-x) = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$ άρα f άρτια, συνεπώς η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον yy' .

Συνεπώς, $A(a,0), B(-a,0), \Gamma\left(-a, \frac{1}{a^2+1}\right)$ και $\Delta\left(a, \frac{1}{a^2+1}\right)$.

Γ3. $E = AD \cdot AB = \frac{2a}{a^2+1}$ άρα $E(a) = \frac{2a}{a^2+1}$.

$E'(a) = \frac{2(a^2+1) - 2a \cdot 2a}{(a^2+1)^2} = \frac{2(1-a^2)}{(a^2+1)^2}, a > 0.$



Μέγιστο για $a=1$ το $E(1)=1$ τ.μ.α.

Γ4. $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x' f(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx$
 $= f(1) - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \ln 2 - \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2} (\ln 2) =$
 $\frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$

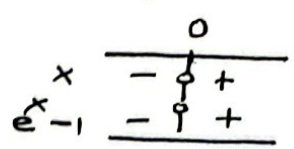
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = e^x + (x-2)e^x - \frac{x^2}{2} = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}.$

$f''(x) = e^x + (x-1)e^x - x = xe^x - x = x(e^x - 1)$

συνεπώς $f''(x) > 0$ για $x \neq 0$ και 0 μόνο για $x=0$.

Άρα f' \nearrow άνωθεν f αυξάνει στο \mathbb{R} .

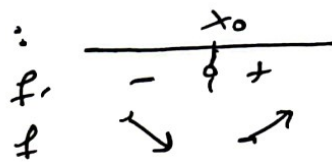


Δ2. $f'(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$, η f' συνεχής στο $[1, 2]$ μτ

$f'(1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f'(2) = e^2 - 2 > 0$ άρα (ΘΒ) υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$

ώστε $f'(x_0) = 0$. Επίσης, αφού $f' \nearrow$ είναι: για $x > x_0$, $f'(x) > 0$

ενώ για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ συνεπώς:



άρα η f έχει ελάχιστο για $x = x_0$.

Δ3. Αφού $x_0 \in (1, 2) \Rightarrow 1 < x_0 < 2$ άρα $(x_0 - 2)e^{x_0} < 0$

υπό $-\frac{x_0^3}{6} < 0$ συνεπώς $f'(x_0) < 0$

Δ4. $f(ny^2x + x^2 + 2) - f(ny^2x + x^2 + 1) < f(2x^2 + 2) - f(2x^2 + 1)$ ①

Θέσω $T(x) = f(x+1) - f(x)$, $T'(x) = f'(x+1) - f'(x) > 0$

αφού $f' \nearrow$ συνεπώς $T(x)$ γν αύξουσα στο \mathbb{R} .

Η ① γράφεται: $T(ny^2x + x^2 + 1) < T(2x^2 + 1) \Leftrightarrow$

$$ny^2x + x^2 + 1 < 2x^2 + 1 \Leftrightarrow ny^2x < x^2 \Leftrightarrow$$

$|\ln y| < |x|$ η οποία ισχύει για κάθε $x \neq 0$.