

ΘΕΜΑΤΑ ΚΙΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1 (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \sqrt{e^{x^2-4}} + 1$ και $g(x) = \ln(x-1)^2$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β. Να βρείτε την συνάρτηση $(g \circ f)$

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta\mu^2 x + 4}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

ΘΕΜΑ 2 (Γ)

Έστω η συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in (0, +\infty) \text{ και } f(1) = \sqrt{2}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f^2(x) - 2\sqrt{x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Έστω ότι $f(x) = \sqrt[4]{4x}$.

β. Δίνονται τα σημεία $A(1, \sqrt{2})$ και $B(-3, 0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A . Έχουν άλλο κοινό σημείο;

γ. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^3}} < 2\sqrt{2}(f(x+1) - f(x)) < \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

ΘΕΜΑ 3 (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$ και $g(x) = \ln(e^x - 1) - x$

α. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση: $y = x - 2\ln 2$ εφάπτεται της συνάρτησης f και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

ΘΕΜΑ 4 (Γ)

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3, \quad g(x) = x^2 - 4x + 7.$$

α. Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

β. Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή την οποία και να βρείτε.

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a)-2}{x-2} + \frac{f(\beta)-2}{x-1} = 1$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$

ΘΕΜΑ 5 (Β)

Δίνεται το πολυώνυμο με τύπο: $P(x) = x^3 + 6x^2 - ax + 2$, $a > -12$

α. Να βρείτε τη θέση του σημείου καμπής.

β. Να αποδείξετε ότι παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δύο ακριβώς σημεία ρ_1, ρ_2 για τα οποία ισχύει ότι: $\rho_1 < -2 < \rho_2$.

γ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του $P(x)$ στο σημείο καμπής δεν έχει κανένα σημείο στο 1^ο τεταρτημόριο.

