ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=\frac{2}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^2}$, $f(1)=2$, $f'(1)=-2$

$y-2=-2(x-1) \Rightarrow$ η (ε) είναι η : $y=-2x+4$.

Εφ/νη κάθετη στην (ε) θα έπρεπε να έχει $f'(x_0)=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$-\frac{2}{x_0^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x_0^2=-4$, αδύνατο.

Γ2. Εφ/νη της C_g : $y=g'(x_0)x-x_0g'(x_0)+g(x_0)$ άρα σε $(x_0, g(x_0))$

Ζητώ: $g'(x_0)=-2$ και $2x_0+g(x_0)=4 \Rightarrow$

$-2x_0+\alpha=-2$ και $2x_0-x_0^2+\alpha x_0=4$, άρα: $\alpha=2x_0-2$

και $2x_0-x_0^2+2x_0^2-2x_0=4 \Rightarrow x_0^2=4 \Rightarrow x_0=\pm 2$ $\left[\begin{array}{l}\alpha=2\\ \alpha=-6\end{array}\right.$

Αν $x_0=2$, $f(2)=1$ $g(2)=-4+4=0$

$x_0=-2$, $f(-2)=-1$ $g(-2)=-4+12=8$ άρα η επαφή δεν πραγματοποιείται σε κοινό σημείο τους

Γ3. Αρκεί νδο υπάρχει μοναδικό ρ, ρ<0 ώστε $g'(\rho)=e^\rho-\rho$

$\Rightarrow -2\rho-6=e^\rho-\rho \Leftrightarrow e^\rho+\rho+6=0$

Έστω $h(x)=e^x+x+6$, η $h(x)\nearrow$ και $h(-7)=\frac{1}{e^7}-1<0$

ενώ $h(0)=7$ άρα (ΘΒ) υπάρχει $\rho\in(-7,0)$ ώστε $h(\rho)=0$

ρ μοναδικό αφού $h\nearrow$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ζητώ η $y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ να ταυτίζεται με την $y=-2x+1$

$f'(x_0)=-2$ και $2x_0+f(x_0)=1 \Rightarrow$

$\frac{\alpha}{x_0}=-2$ και $2x_0+\alpha\ln x_0+2=1 \Rightarrow \alpha=-2x_0$

και $2x_0-2x_0\ln x_0+1=0$.

Έστω $g(x)=2x(1-\ln x)+1$. Είναι $g(1)=3$, $g(e^2)=-2e^2+1<0$

άρα (ΘΒ) υπάρχει $x_0\in(1,e^2)$ ώστε $g(x_0)=0$.

Δ2. Η g γνήσια φθίνουσα (με χρήση παραγώγου,

$g'(x)=2-2\ln x-2=-2\ln x<0 \ \forall x>1$)