[illegible] – 2024

A3. Ψευδής, $f(x)=|x|$, συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

A4. Σωστό – Σωστό – Λάθος – Σωστό – Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$: $y=f'(2)x-2f'(2)+f(2)$ είναι η $y=-3x+4$, συνεπώς $f'(2)=-3$ και $-2\cdot(-3)+f(2)=4 \Rightarrow f(2)=-2$.

B2. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+2}{x-2}=-3=f'(2)$.

i. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)+2x}{x^2-1} \underset{y=x+1}{=} \lim_{y\to 2}\frac{f(y)+2y-2}{(y-1)^2-1}=\lim_{y\to 2}\frac{f(y)+2+2y-4}{y^2-2y}$$

$$=\lim_{y\to 2}\left[\frac{f(y)+2}{y(y-2)}+\frac{2(y-2)}{y(y-2)}\right]=\lim_{y\to 2}\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{f(y)+2}{y-2}+\frac{2}{y}\right]=\frac{1}{2}(-3)+1=-\frac{1}{2}$$

ii. $$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+3)-f(1-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left[\frac{f(x+3)+2}{x+1}-\frac{f(1-x)+2}{x+1}\right] \quad (1)$$

Θέτω $y=x+3$ στο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x+3)+2}{x+1}=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{f(y)+2}{y-2}=-3$

Θέτω $y=-x+1$ στο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(1-x)+2}{x+1}=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{f(y)+2}{2-y}=+3$

άρα η (1) δίνει: $-3-(+3)=-6$.

B3. $g'(x)=f'(x^2+1)\cdot 2x+\left(e^{(x+1)\cdot\ln(x+2)}\right)' \Rightarrow$

$$g'(x)=2x\,f'(x^2+1)+(x+2)^{x+1}\cdot\left[\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}\right]$$

συνεπώς: $g'(1)=2f'(2)+9\cdot\left(\ln 3+\frac{2}{3}\right)=9\ln 3$

$g(1)=f(2)+9=7$

άρα η εφαπτ: $y-7=9\ln 3\,(x-1) \Rightarrow y=9\ln 3\,x-9\ln 3+7$