ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ5 – 2324

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. **(8 μονάδες)**

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κλειστό διάστημα [α, β]; **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο α του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο α». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. **(1+3=4 μονάδες)**

Α4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
α. Η γραφική της παράσταση είναι ημικύκλιο β. Έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή γ. Είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [-1,1] δ. Έχει οριζόντια εφαπτομένη σε ένα ακριβώς σημείο της. ε. Είναι περιττή.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι για μια συνάρτηση f συνεχή στο R και παραγωγίσιμη στο $x_o=2$, γνωρίζουμε ότι η ευθεία με τύπο $y=-3x+4$ είναι η εφαπτομένη της στο $x_o=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι: $f'(2) = -3$ και $f(2) = -2$. **(6 μονάδες)**

Β2. Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+1)+2x}{x^2-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x+3)-f(1-x)}{x+1}$ **(10 μονάδες)**

Β3. Αν η συνάρτηση g με τύπο: $g(x) = f(x^2+1)+(x+2)^{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο α=1. **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0,+\infty)$ και $g(x) = -x^2 + ax$, $a, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της συνάρτησης f στο $x_o=1$ και στη συνέχεια να βρείτε – αν υπάρχει – εφαπτομένη της ίδιας συνάρτησης που να είναι κάθετη στην (ε). **(2+3=5 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η (ε) να εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Είναι δυνατόν η επαφή να πραγματοποιείται σε κοινό σημείο των C_f , C_g ; **(9+3=12 μονάδες)**

Έστω ότι $g(x) = -x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ρ, ρ<0 , ώστε η εφαπτόμενη της C_g στο $(\rho, g(\rho))$, να είναι παράλληλη της ευθείας με εξίσωση: $y = (e^{\rho} - \rho)x$. **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = a\ln x + 2$, $x \in (1,+\infty)$, $a < 0$ καθώς και η ευθεία (ε) με εξίσωση: $y = -2x + 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει x_o, $x_o \in (1,+\infty)$, ώστε η (ε) να εφάπτεται της C_f στο $(x_o, f(x_o))$.

(10 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι το x_o είναι μοναδικό. **(8 μονάδες)**

Δ3. Με δεδομένο ότι η (ε) είναι η εφαπτόμενη στο $(x_o, f(x_o))$, να δείξετε ότι:

$\ln(-a) = 1 + \ln 2 - \frac{1}{a}$, $a < -2$ **(7 μονάδες)**