Απαντήσεις ΕΠ4 - 2324

Α3. Λ - Λ - Σ - Λ - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_h = \mathbb{R}$ $A_g = (0, +\infty)$ $A_{h\circ g} = \{x \in (0,+\infty)$ και $g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

$h(g(x)) = h(\ln\sqrt{x}) = e^{-\ln\sqrt{x}} - e^{\ln\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}}$
$-\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$ $\Big\}\oplus$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ δηλ. $f \searrow$ άρα f 1-1 και $A_{f^{-1}}$ = σύνολο τιμών f.

$x \in (0, +\infty) \xrightarrow[f\searrow]{} f(x) \in (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = \mathbb{R} = A_{f^{-1}}$

Β2. α) Είναι $-\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu 2x}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$ και αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$

από κ.π. είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu 2x}{f(x)} = 0$

β) Επειδή $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ και $0 < \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^y = 0$

Β3. Αφού $T(x)$ συνεχής και $T(x) \neq 0$, η $T(x)$ διατηρεί πρόσημο.

Θέτω $k(x) = \frac{T(x) - \sqrt{x} f(x) + \eta\mu(x-2)}{x-2} \Rightarrow T(x) = k(x)(x-2) + x - 1 - \eta\mu(x-2)$

άρα $T(2) = \lim_{x\to 2} T(x) = \lim_{x\to 2}[k(x)(x-2) + x - 1 - \eta\mu(x-2)] = 1$

συνεπώς $T(x) > 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ και $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ άρα $A = (1, 4]$

Με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, δηλ. $f \searrow$ συνεπώς:

$x \in (1, 4] \xrightarrow[f\searrow]{} f(x) \in [f(4), \lim_{x\to 1^+} f(x)) = [-\ln 3, +\infty)$ αφού

$\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$.

Γ2. Η εξίσωση $f^{-1}(f(x)+\sqrt{2}-2024)=2 \overset{f_0}{\Leftrightarrow}$

$f(x)+\sqrt{2}-2024=f(2)=\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x)=2024$. Επειδή το 2024 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\rho\in(\cancel{0},+\infty)$ ώστε $f(\rho)=2024$, μοναδικό γιατί $f\downarrow$.

Γ3. Αν $x\in(1,4] \Leftrightarrow 1<x\leq 4 \Rightarrow -5<x-6\leq -2$ δηλ. $(x-6)\in(-5,-2]$ και επειδή $f(x)\geq -\ln 3>-2$ η εξίσωση $f(x)=x-6$ είναι αδύνατη.

Γ4. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{f(x)}{(x-1)^3}\cdot \eta\mu(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{f(x)}{(x-1)^2}\cdot\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\cdot f(x)\right]=$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$. Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)\,\eta\mu(x-1)}{(x-1)^3}=(+\infty)\cdot 1=+\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g(x)=f(x)-2x$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, $g(x)\neq 0$, άρα διατηρεί πρόσημο και αφού $g(1)=f(1)-2>0 \Rightarrow g(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. δηλ. $f(x)>2x$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Δ2. $(f(x)-2x)e^{-2x}+\frac{1}{2x-f(x)}=0 \Leftrightarrow (f(x)-2x)e^{-2x}=\frac{1}{f(x)-2x}$

$\Rightarrow (f(x)-2x)^2=e^{2x} \Rightarrow |f(x)-2x|=e^x$ και αφού $f(x)>2x$

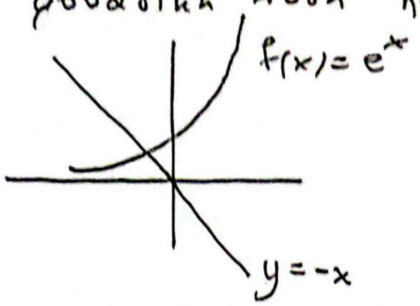
$\Rightarrow f(x)=2x+e^{x}$

Δ3. Η f αύξουσα γιατί $f\uparrow$. Πράγματι, αν $x_1<x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow x=f(x) \Leftrightarrow x=2x+e^x \Leftrightarrow$

$e^x=-x$

Η εξίσωση έχει μοναδική λύση που φαίνεται από τη γραφική τους:



(β' τρόπος: Έστω $T(x)=e^x+x$, $T(0)=1$, $T(-1)=\frac{1}{e}-1<0$ άρα από Θ.Β. υπάρχει ρίζα της $T(x)$, μοναδική γιατί $T \uparrow$)

Δ4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e\cdot e^{f(x)}-\alpha^{f(x)}}{e^{f(x)}+\alpha\cdot\alpha^{f(x)}}=-\frac{1}{4}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $0<\alpha<e$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{f(x)}\left[e-\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{f(x)}\right]}{e^{f(x)}\left[1+\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{f(x)}\right]}=e$, μη δεκτό.

Αν $\alpha=e$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{f(x)}(e-1)}{e^{f(x)}(1+e)}=\dfrac{e-1}{e+1}$, μη δεκτή.

Αν $\alpha>e$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha^{f(x)}\left[e\cdot\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{f(x)}-1\right]}{\alpha^{f(x)}\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{f(x)}+\alpha\right]}=-\frac{1}{\alpha}$

Τότε $-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{4} \iff \alpha=4$, δεκτή λύση.