# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5 – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2$^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

## ΘΕΩΡΙΑ

**Θ1.** Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, είναι μια εξίσωση 2$^{ου}$ βαθμού. Για να λύσουμε μια τέτοια εξίσωση, υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\Delta<0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\Delta=0$, η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες: $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta>0$, η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Εννοείται (; 😊 ) πως η αρχική εξίσωση μπορεί να είναι σε διαφορετική μορφή από την αx$^2$+βx+γ=0. Σε αυτή την περίπτωση, φέρνουμε τα πάντα στο ίδιο μέλος αφήνοντας το 0 στο άλλο και διατάσσουμε το πολυώνυμο ώστε να είναι συμβατό με την αρχική μορφή.
Επίσης, αν η αρχική εξίσωση είναι ρητή (δηλαδή περιέχει κλάσματα με μεταβλητή στον παρονομαστή), ξεκινάμε με περιορισμούς (παρονομαστές διάφοροι του μηδενός) , απαλοιφή παρονομαστών και συνεχίζουμε με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω.

**Θ2.** Αν στην εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, συμβεί το β ή το γ να είναι μηδέν, η εξίσωση λύνεται και χωρίς τη χρήση της διακρίνουσας. Δείτε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

$2x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2,\quad x^2-5=0\Leftrightarrow x^2=5\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5},\quad 3x^2+27=0\Leftrightarrow x^2=-9,$ αδύνατη

$4x-2x^2=0\Leftrightarrow 2x(2-x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2.\qquad 6x^2+3x=0\Leftrightarrow 3x(2x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$

**Θ3.** Άθροισμα και γινόμενο ριζών και η χρήση τους.

Με την προϋπόθεση ότι $\Delta\geq 0$, $x_1+x_2=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-2\beta}{2\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, συμβολίζουμε το άθροισμα με $s=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

$x_1\cdot x_2=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2}=-\dfrac{\beta^2-\beta^2+4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\dfrac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, συμβολίζουμε το γινόμενο με $p=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Αν για κάποια εξίσωση 2$^{ου}$ βαθμού έχουν δοθεί οι ρίζες της, τότε μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση που να δέχεται τις γνωστές μας ρίζες ως λύση της. Προσοχή!! Η εξίσωση που φτιάχνουμε δεν είναι μοναδική!
Έστω λοιπόν ότι $x_1, x_2$ είναι οι γνωστές μας ρίζες. Υπολογίζουμε τα $s=x_1+x_2$ και $p=x_1\cdot x_2$.
Τότε, μια εξίσωση που έχει ρίζες τα $x_1, x_2$ είναι η: $x^2-sx+p=0$, αλλά και κάθε άλλη εξίσωση της μορφής $\kappa\cdot\left(x^2-sx+p\right)=0$, με $\kappa\neq 0$.

**Θ4.** Στην επίλυση εξισώσεων 2$^{ου}$ βαθμού, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $|A|^2=A^2$ , όπως επίσης και τις ταυτότητες $\alpha^2+\beta^2=\left(\alpha+\beta\right)^2-2\alpha\beta$, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

**Θ5.** Μπορούμε να λύνουμε συστήματα της μορφής: $\begin{cases}x+y=s\\ x\cdot y=p\end{cases}$. Τα x, y είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2-sx+p=0$. Αν, για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι x+y=-5 και xy=6, τότε η εξίσωση x$^2$+5x+6=0 είναι η «επιλύουσα» του συστήματος που δίνει ότι (x=-2 και y=-3) ή (x=-3 και y=-2).

**Θ6.** Αν γνωρίζουμε τις άνισες ρίζες $x_1$ , $x_2$ της εξίσωσης αx$^2$+βx+γ=0, τότε ισχύει: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$. Επίσης, αν Δ=0, η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μπορεί να γραφτεί σαν τετράγωνο διωνύμου είτε απευθείας είτε μετά από ένα κοινό παράγοντα. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$2x^2-5x+3=0 \xleftrightarrow{1,\frac{3}{2}} 2(x-1)(x-\frac{3}{2})=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-3)=0,\quad -x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow -(x-3)^2=0$

$x^2-x-2=0 \xleftrightarrow{-1,2} (x+1)(x-2)=0\ ,\quad 2x^2-8x+8=0 \Leftrightarrow 2(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2=0$

**Θ7.** Αν η ποσότητα p=γ/α είναι αρνητική, τότε η αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες γιατί: $\frac{\gamma}{\alpha}<0 \Leftrightarrow \alpha\gamma<0 \Leftrightarrow -4\alpha\gamma>0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma>0 \Leftrightarrow \Delta>0.$

**Θ8.** Σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις οποίες υπάρχουν μέσα και παράμετροι, θα πρέπει να μπορούμε να ξεκινήσουμε τις αντίστοιχες ασκήσεις διατυπώνοντας τις κατάλληλες απαιτήσεις.

| Αν ένα τριώνυμο πρέπει να έχει: | Ζητάμε: |
|---|---|
| • Δύο άνισες ρίζες | $\Delta>0$ |
| • Δύο πραγματικές ρίζες | $\Delta\geq 0$ |
| • Δύο ίσες ρίζες (Μια διπλή ρίζα) | $\Delta=0$ |
| • Δύο θετικές ρίζες | $\Delta\geq 0,\ s>0,\ p>0$ |
| • Δύο αρνητικές ρίζες | $\Delta\geq 0,\ s<0,\ p>0$ |
| • Δύο ετερόσημες ρίζες | $p<0$ |
| • Δύο αντίθετες ρίζες | $s=0$ και ελέγχουμε στη συνέχεια αν $\Delta\geq 0$. |
| • Δύο αντίστροφες ρίζες | $p=1$ και ελέγχουμε στη συνέχεια αν $\Delta\geq 0$. |
| • Να μην έχει ρίζες (δηλαδή να διατηρεί πρόσημο) | $\Delta<0$ |

**Θ9.** Υπάρχουν πολλές εξισώσεις που μπορούν να λυθούν αντικαθιστώντας με βοηθητικό άγνωστο συγκεκριμένες κάθε φορά παραστάσεις ώστε να προκύπτει εξίσωση δευτέρου βαθμού. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

$(2x-1)^2-3|2x-1|+2=0 \xrightarrow{y=|2x-1|} y^2-3y+2=0...$

$\left(x^2-2x\right)^2+x^2-2x-2=0 \xrightarrow{y=x^2-2x} y^2+y-2=0...$

$x^6-9x^3+8=0 \xrightarrow{y=x^3} y^2-9y+8=0...$

**Θ10.** Αν σε μια άσκηση με παραμετρική δευτεροβάθμια εξίσωση δίνεται μια σχέση ανάμεσα στις ρίζες ενός τριωνύμου, τότε εργαζόμαστε με άθροισμα και γινόμενο ριζών αξιοποιώντας τη δοσμένη σχέση.

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**Π1.** Να δικαιολογήσετε ότι οι παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν ρίζες :

α. $x^2-(a-1)x-2=0$ β. $x^2-(a+2)x+2a=0$ c. $x^2-(a-2b)x-2ab=0$

Βρίσκουμε τις διακρίνουσες για τα τρία τριώνυμα και έχουμε:

α. $\Delta=(a-1)^2+8>0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες.

b. $\Delta=(a+2)^2-8a=a^2-4a+4=(a-2)^2\geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες.

c. $\Delta=(a-2b)^2+8ab=a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2\geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες

**Π2.** Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x}{x+2}-\frac{3}{x-2}=0$

Ξεκινάμε περιορίζοντας τους παρονομαστές ώστε να είναι διαφορετικοί του μηδενός και στη συνέχεια πάμε σε απαλοιφή παρονομαστών και επίλυση της δευτεροβάθμιας που προκύπτει:

Πρέπει $x\neq 2$ και $x\neq -2$. $\frac{x}{x+2}-\frac{3}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3x-6=0 \Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=6$, δεκτές.

**Π3.** Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες: α. $-5,2$ β. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

Υπολογίζουμε τα s,p δηλαδή : $s = -5+2 = -3$, $p = -5\cdot 2 = -10$, άρα : $x^2 - sx + p = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$.

Ομοίως για το β : $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $p = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$, άρα : $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$.

**Π4.** Αν $x_1$ , $x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - x - 7 = 0$ , να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

a. $x_1^2 + x_2^2$ b. $x_1^3 + x_2^3$ c. $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$ . Θα εφαρμόσουμε ταυτότητες, γνωρίζοντας ότι: s=1, p=-7.

a. $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p = 1 + 14 = 15$

b. $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = s\left(s^2 - 3p\right) = s^3 - 3ps = 1 + 21 = 22$

c. $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} = \frac{s^3 - 3ps}{p} = -\frac{22}{7}$

**Π5.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{matrix} x + y = 3 \\ xy = -5 \end{matrix}$

Αρκεί να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2$-3x-5=0. Άρα : $x = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ και $y = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$ ή αντίστροφα!

**Π6.** Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

a. $(x-2)^2 - 5|x-2| - 6 = 0$ b. $\left(x^2 - 2x\right)^4 + \left(x^2 - 2x\right)^2 - 2 = 0$

a. Θέτω $y = |x-2|$ και λύνω την εξίσωση : $y^2 - 5y - 6 = 0$, οπότε $y = 6$ ή $y = -1$. Συνεπώς, $|x-2| = -1$ (αδύνατη) ή $|x-2| = 6 \Leftrightarrow x = 8$ ή $x = -4$.

b. Θέτω $y = (x^2 - 2x)^2$ και λύνω την εξίσωση : $y^2 + y - 2 = 0$, οπότε $y = 1$ ή $y = -2$.
Η εξίσωση $(x^2 - 2x)^2 = -2$ είναι αδύνατη, ενώ η $(x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1$ ή $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ ή $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 1 - \sqrt{2}$ ή $x = 1 + \sqrt{2}$

**Π7.** Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής έχουν νόημα οι παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε:

$A = \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}$ , $B = \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x^2 - (a-1)x - a}$, $a \in \mathbb{R}$

Για την παράσταση Α, πρέπει ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν. Δηλαδή $2x^2 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -\frac{1}{2}$.

Οι ρίζες του αριθμητή είναι τα 1 και $-4$, συνεπώς το κλάσμα γράφεται : $\frac{(x-1)(x+4)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})} = \frac{x-4}{2x+1}$

Για την παράσταση Β, πρέπει ο παρονομαστής επίσης να μην είναι μηδέν. Η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = (a-1)^2 + 4a = a^2 + 1 + 2a = (a+1)^2 \geq 0$, και οι ρίζες του είναι τα α και $-1$, ενώ με αντίστοιχη διαδικασία για τον αριθμητή, έχουμε $\Delta = (a-2)^2 \geq 0$ και ρίζες τους αριθμούς α και 2.

Επομένως, πρέπει $x \neq a$ και $x \neq -1$ και τότε $B = \frac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$

**Π8.** Δίνεται η εξίσωση: $(a-1)x^2 - (a+b)x - 2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$

α. Για α=1 , να περιορίσετε κατάλληλα το b ώστε η εξίσωση να έχει μοναδική λύση.

β. Αν το α διαφορετικό του 1 και οι ρίζες της εξίσωσης είναι τα -1 και 2, να βρείτε τις τιμές των α, b.

a. Αν $\alpha = 1$, η εξίσωση γίνεται: $-(1+b)x - 2 = 0 \Leftrightarrow (1+b)x = -2$ συνεπώς θα έχει λύση το $x = \frac{-2}{b+1}$, εφόσον $b \neq -1$

b. Αν $\alpha \neq 1$, η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με ρίζες τους $-1$ και 2, συνεπώς $s = 1$, $p = -2$ άρα $\frac{\alpha + b}{\alpha - 1} = 1$ και $\frac{-2}{\alpha - 1} = -2$.

Η δεύτερη σχέση γίνεται $-2 = -2\alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha = -2$, οπότε η πρώτη σχέση γίνεται: $\frac{-2+b}{-3} = 1 \Leftrightarrow b = -1$.

**Π9.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \alpha x - 27 = 0$. Αν γνωρίζουμε ότι η μια ρίζα της ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες της και την τιμή του α.

Θα δουλέψουμε με άθροισμα και γινόμενο ριζών.

$x_1 = x_2^2$, $x_1 + x_2 = -\alpha$, $x_1 \cdot x_2 = -27$ συνεπώς η τελευταία σχέση θα δώσει $x_2^3 = -27 \Leftrightarrow x_2 = -3$

επομένως $x_1 = 9$ και $9 - 3 = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -6$

**Π10.** Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha - 2)x^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha - 2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες και για τη μικρότερη από τις δύο τιμές του α να βρείτε και την λύση της εξίσωσης.

Απάντηση: Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = (3\alpha + 2)^2 - 4(\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3\alpha + 2 - 2\alpha + 4)(3\alpha + 2 + 2\alpha - 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$ ή $\alpha = \frac{2}{5}$

Για $\alpha = -6$, η εξίσωση γίνεται: $-8x^2 + 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow -8(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

β. Αν α<-6, να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες και αντίστροφες ρίζες.

Απάντηση:

Είναι $\Delta = (\alpha + 6)(5\alpha - 2)$, συνεπώς, αν $\alpha < -6 \Rightarrow \alpha + 6 < 0$ και $5\alpha - 2 < 0 \Rightarrow \Delta > 0$, άρα έχει 2 άνισες ρίζες.

Επίσης, επειδή $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{\alpha - 2}{\alpha - 2} = 1$, οι ρίζες είναι αντίστροφες.

**Π11.** Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $x_1 - 3$, $x_2 - 3$, όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 + x - 5 = 0$

Απάντηση: Υπολογίζουμε τα s, p της δοσμένης εξίσωσης. Είναι s=-1 και p=-5. Στη συνέχεια βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της ζητούμενης εξίσωσης :

$x_1 - 3 + x_2 - 3 = -7$ και , $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 = -5 + 3 + 9 = 7$ , συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 + 7x + 7 = 0$ (ή οποιαδήποτε με μορφή: $k(x^2 + 7x + 7) = 0$, $k \in \mathbb{R}^*$).

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α1.** Να βρείτε με τη μεγαλύτερη δυνατή συντομία τις διακρίνουσες των παρακάτω εξισώσεων:

a. $x^2 - 2x - 3 = 0$ b. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ c. $3x^2 - 4x - 7 = 0$ d. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

**Α2.** Οι διακρίνουσες των παραπάνω τριωνύμων είναι αντίστοιχα: α. Δ=16 b. Δ=1 c. Δ=100 d. Δ=0. Να βρείτε με τη μεγαλύτερη δυνατή συντομία τις ρίζες τους και να τα γράψετε σε παραγοντοποιημένη μορφή.

**A3.** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν λύση για κάθε τιμή των παραμέτρων που περιέχουν:

a. $x^2 - 2ax - 3 = 0$ b. $2x^2 - 5ax + 3a^2 = 0$ c. $3x^2 - (a+\beta)x - \beta^2 = 0$ d. $ax^2 - 12x - 4a = 0$

**A4.** Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $2x_1 - 1,\ 2x_2 - 1$, όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - x - 4 = 0$

**A5.** Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$, όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 3x + 1 = 0$

**A6.** Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 - 7x + 3}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β. Να λύσετε την εξίσωση A=x.

**Α7.** Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-(\alpha+1)x+\alpha=0,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

α. Να λύσετε την εξίσωση αν γνωρίζετε ότι είναι πρώτου βαθμού.

β. Αν η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού με δύο ίσες ρίζες, να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α.

γ. Αν ισχύει ότι $\alpha\in(-\frac{1}{3},0)\cup(0,1)$, να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

**Α8.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(\alpha-2)x-\alpha^2=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$

α. Να δικαιολογήσετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού α.

β. Αν η εξίσωση έχει δύο αντίθετες ρίζες, να βρείτε το α καθώς και τις ρίζες της.

γ. Είναι δυνατόν η αρχική εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

**Α9.** Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2-506x+5=0,\ y^2-y-1001=0$ με ρίζες $x_1,x_2,y_1,y_2$ αντίστοιχα.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_2(x_1^2-y_2)+x_1(x_2^2-y_1)-y_1x_2-y_2x_1$

**Α10.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2+x-\alpha^2=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι οι εικόνες των ριζών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουν απόσταση ίση με $\sqrt{17}$.

**1388.** Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

**α)** Να βρείτε τη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)
**β)** Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)
**γ)** Για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

**1412.** Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)\cdot x^2-(\lambda^2-1)\cdot x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

**α)** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)
**β)** Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$. (Μονάδες 6)
**γ)** Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
**δ)** Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

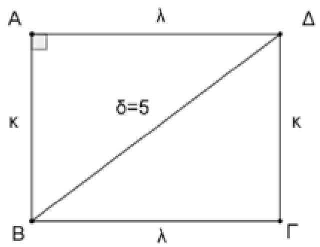
**33889. α)** Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x^2-14x+8=0$ (1) και $8x^2-14x+3=0$ (2). (Μονάδες 10)
**β)** Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (3) και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (4), με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε:

**i)** $\rho\neq 0$ (Μονάδες 5)

**ii)** ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

**13320.** Θεωρούμε τις εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (Ι) και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (ΙΙ) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha\neq\gamma$.
**α)** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. (Μονάδες 8)
**β)** Αν ο αριθμός $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της (Ι) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ) (Μονάδες 9)
**γ)** Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (Ι), (ΙΙ) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

**34390.** Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi=14$ cm και μια διαγώνιος $\delta=5$ cm.




**α) i.** Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2=\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E=12\text{ cm}^2$. (Μονάδες 7)
**ii.** Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-7x+12=0$. (Μονάδες 7)
**iii.** Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

**β)** Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=14$ cm πρέπει να έχει εμβαδόν $E\leq\frac{49}{4}$. (Μονάδες 7)

**34544.** Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με άγνωστο το $x$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$. (Μονάδες 7)

**β)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda$. (Μονάδες 9)

**γ)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου $\lambda$ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 9)

**36651.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

**α)** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$. (Μονάδες 8)

**β) i.** Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 3)

**ii.** Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 6)

**γ)** Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

**35038.** Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

**α)** Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

**β)** Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

**1316.** Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

**α)** Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

**β)** Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

**34310.** Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

**α)** Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)

**β)** Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)

**γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

**33854.** Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $x_1, x_2$ διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

**β)** Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

**γ)** Αν για τις ρίζες $x_1, x_2$ ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:

**i)** Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

**ii)** Να προσδιορίσετε τις ρίζες $x_1, x_2$ την τιμή του λ. (Μονάδες 8)

**33585.** Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$ με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

**β)** Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 10)

**γ)** Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)