# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4 – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

## ΘΕΩΡΙΑ

**Θ1.** Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x=\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει: Μία ακριβώς λύση, την $x=\dfrac{\beta}{\alpha}$ εφόσον $\alpha\neq 0$.

Αν πάλι το α=0, τότε η εξίσωση είτε είναι αδύνατη (εφόσον $\beta\neq 0$) , είτε έχει άπειρες λύσεις εφόσον β=0. Αν στην εξίσωση εκτός του άγνωστου, υπάρχουν και άλλα γράμματα (τα οποία ονομάζονται παράμετροι) τότε πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις κατά τη λύση της εξίσωσης , δηλαδή να κάνουμε αυτό που λέμε «διερεύνηση». Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η αρχική εξίσωση να φτάσει στη μορφή αx=β, δηλαδή θα πρέπει – ανάλογα με τη μορφή που έχει – να γίνουν απαλοιφή παρονομαστών και παρενθέσεων, χωρισμός γνωστών-αγνώστων και – ίσως – να βγάλουμε κοινό παράγοντα το x από τους όρους του 1ου μέλους.

**Θ2.** Αν η εξίσωση περιλαμβάνει απόλυτες τιμές, και τα Α(x), Β(x) αντιπροσωπεύουν παραστάσεις με x, τότε δουλεύουμε ως εξής:

Αν $|f(x)|=\alpha \xrightarrow{\alpha>0} f(x)=\alpha$ ή $f(x)=-\alpha$.

Αν $|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$

Αν $|f(x)|=g(x)$ τότε περιορίζουμε το $g(x)\geq 0$ και στη συνέχεια $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$.

Χαρακτηρίζουμε ως δεκτές ή μη δεκτές τις λύσεις.

**Θ3.** Αν στην εξίσωση ο άγνωστος παράγοντας είναι παράσταση μέσα σε απόλυτο, μπορούμε να την ονομάσουμε με έναν βοηθητικό άγνωστο και να την επιλύσουμε. Θυμηθείτε ότι |Α|=|-Α| για κάθε Α.

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**Π1.** Να λυθεί η εξίσωση: $2(1-3x)-\alpha=\alpha(x+1),\ \alpha\in\mathbb{R}.$

Ξεκινάμε με πολ/μους και χωρισμό γνωστών – αγνώστων:

$2(1-3x)-\alpha=\alpha(x+1)\Leftrightarrow 2-6x=\alpha x+\alpha\Leftrightarrow -6x-\alpha x=\alpha-2\Leftrightarrow(6+\alpha)x=2-\alpha$ (*) Σε αυτό το σημείο ξεκινά η διερεύνηση των λύσεων όπως περιγράψαμε στην αρχή, δηλαδή:

- ◦ Αν $\alpha+6\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq -6$, η εξίσωση έχει μια μοναδική λύση, την $x=\dfrac{2-\alpha}{\alpha+6}$
- ◦ Αν $\alpha=-6$, η εξίσωση (*) γίνεται: $0x=8$, συνεπώς είναι αδύνατη.

**Π2.** Να λυθεί η: $2(1-\alpha x)-\alpha=\alpha(3-\alpha x)\Leftrightarrow 2-2\alpha x-\alpha=3\alpha-\alpha^2x\Leftrightarrow \alpha^2x-2\alpha x=4\alpha-2\Leftrightarrow(\alpha^2-2\alpha)x=4\alpha-2$ (*)

- ◦ Αν $\alpha^2-2\alpha\neq 0\Leftrightarrow \alpha(\alpha-2)\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 2$, η εξίσωση έχει μια μοναδική λύση, την $x=\dfrac{2(2\alpha-1)}{\alpha(\alpha-2)}$
- ◦ Αν $\alpha=0$, η εξίσωση (*) γίνεται: $0x=-2$, συνεπώς είναι αδύνατη.
- ◦ Αν $\alpha=2$, η εξίσωση (*) γίνεται: $0x=6$, οπότε η εξίσωση είναι και πάλι αδύνατη.

**Π3.** Να λυθεί η εξίσωση: $|2x-1|=x+1$

Ζητώ $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$. Συνεπώς: $2x-1=x+1$ ή $2x-1=-x-1\Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$, δεκτές.

**Π4.** Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^2-6x+9}=2x+1$

$\sqrt{x^2-6x+9}=2x+1\xrightarrow{2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}}\sqrt{(x-3)^2}=2x+1\Leftrightarrow|x-3|=2x+1\Leftrightarrow$

$x-3=2x+1$ ή $x-3=-2x-1\Leftrightarrow x=-4$ (Μη δεκτή) ή $x=\dfrac{2}{3}$, δεκτή

**Π5.** Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2|x-1|-1}{3}-\frac{2-|1-x|}{2}=\frac{1}{6}$

$\frac{2|x-1|-1}{3}-\frac{2-|1-x|}{2}=\frac{1}{6}\xrightarrow{y=|x-1|=|1-x|}\frac{2y-1}{3}-\frac{2-y}{2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 4y-2-6+3y=1\Leftrightarrow 7y=9\Leftrightarrow y=\frac{9}{7}$.

Οπότε, $x-1=\frac{9}{7}$ ή $x-1=-\frac{9}{7}\Leftrightarrow x=\frac{16}{7}$ ή $x=-\frac{2}{7}$

**Π6.** Δίνεται η εξίσωση: $\alpha(\alpha-2x)-3(x-1)=x(2\alpha-1)+1+b$

α. Να λυθεί η εξίσωση για α=0.  β. Αν α=2, να βρείτε το β ώστε η εξίσωση να έχει λύση.

Φέρνουμε την εξίσωση σε κατάλληλη μορφή: $\alpha(\alpha-2x)-3(x-1)=x(2\alpha-1)+1+b\Leftrightarrow \alpha^2-2x\alpha-3x+3=2\alpha x-x+1+b$
$x(-4\alpha-2)=\alpha^2+b-2\Leftrightarrow x(4\alpha+2)=2-\alpha^2-b$

a. Για $\alpha=0$: $-2x=b-1\Leftrightarrow x=\frac{1-b}{2}$, δηλαδή έχει μια λύση για κάθε $b\in\mathbb{R}$.

b. Για $\alpha=-\frac{1}{2}$: $0x=2-\frac{1}{4}-b$. Για να έχει λύση, πρέπει $2-\frac{1}{4}-b=0\Leftrightarrow b=\frac{7}{4}$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α1.** Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

a. $|3x-2|=2|x+1|$  b. $2|x+1|=x-1$  c. $|2-x|=x-2$  d. $\sqrt{4x^2-12x+9}=x-1$

**Α2.** Να λύσετε και να διερευνήσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $(\alpha^2-1)x=\alpha^2-\alpha$  β. $(\alpha-2)x=b+1$

**Α3.** Να δικαιολογήσετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση για κάθε τιμή των παραμέτρων.

α. $(\alpha^2+1)x=\alpha^2-\alpha$  β. $(\alpha^2+\beta^2)x=\alpha+\beta$

**A4.** Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $\frac{|3x-6|-2}{3}-\frac{1-|2-x|}{2}=\frac{1}{3}$ b. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2}=|2x+4|$

**A5.** Δίνεται η εξίσωση: $a(ax-1)=2(2x-1)+b^2$

α. Να λυθεί η εξίσωση για α=0. β. Αν α=-2, να βρείτε το b ώστε η εξίσωση να έχει λύση.

## ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

**34146.** Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$ .

**α)** Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

**i)** όταν $\alpha=1$ . (Μονάδες 5)

**ii)** όταν $\alpha=-3$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

**34163.** Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

**γ)** Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

**14224.** Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, $x\neq 0, x\neq 1$.

**α)** Να δείξετε ότι $A=\dfrac{x+1}{x}$. (Μονάδες 8)

**β) i.** Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση Α μηδενίζεται. (Μονάδες 8)

**ii.** Μπορεί η παράσταση Α να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

**34872.** Δίνεται η εξίσωση $\kappa x+3=2x$, με παράμερο $\kappa\in\mathbb{R}$.

**α)** Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa=1$ και για $\kappa=3$. (Μονάδες 13)

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa=2$. (Μονάδες 12)

**35033.** Δίνονται οι παραστάσεις: $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$ , όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

**α)** Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$ . (Μονάδες 16)

**β)** Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

**1308.** Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

**α)** Να δείξετε ότι: $A=4$. (Μονάδες 12)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$ . (Μονάδες 13)

**13169.** Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3\le x\le 5$, τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι $x-5\le 0<x-2$. (Μονάδες 10)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$ . (Μονάδες 15)

**14649.** Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

**α)** Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1-x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

**β) i.** Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.

**ii.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)