ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3 – ΡΙΖΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Θ1. Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, είναι ο θετικός αριθμός x που αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α, δηλαδή $x=\sqrt{\alpha}\Rightarrow x^2=\alpha,\;$ όπου $\alpha>0$. Επίσης, $\sqrt{0}=0$.

Θ2. Η ν-οστή ρίζα ενός θετικού αριθμού α, είναι ο θετικός αριθμός x που αν υψωθεί στην ν-οστή, μας δίνει τον α. Δηλαδή, η ν-οστή ρίζα του α είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$.

Αν $x=\sqrt[\nu]{\alpha}\Rightarrow x^\nu=\alpha,$ όπου x,α θετικοί.

Θ3. Προσοχή στις παρακάτω ισότητες:

$$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|,\quad (\sqrt{\alpha})^2=\alpha \text{ όπου } \alpha>0 \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|, \text{ ενώ αν } \alpha\ge 0 \text{ είναι } (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha.$$

Θ4. Οι ιδιότητες των ριζών:

$$1.\ \sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta} \qquad 2.\ \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad 3.\ \sqrt[\kappa]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\kappa\nu]{\alpha} \qquad 4.\ \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\kappa\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa},\ \text{ με } \alpha,\beta>0.$$

Θ5. Εφόσον α>0, μπορούμε να γράφουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}$ και να εφαρμόζουμε και για τους ρητούς εκθέτες τις ίδιες ιδιότητες με αυτές που ισχύουν για τους ακέραιους εκθέτες.

Θ6. Ρητοποίηση παρονομαστή: Αν σε παρονομαστή κλάσματος βρεθεί παράσταση με ρίζα, πολ/ντας αριθμητή και παρονομαστή με την κατάλληλη (συζυγή) παράσταση, μπορούμε να «διώξουμε» τη ρίζα από τον παρονομαστή. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)=3-4=-1,\quad \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=x^2+2-x^2=2,\quad \left(2-\sqrt{x+4}\right)\cdot\left(2+\sqrt{x+4}\right)=4-x-4=-x$$

Υποτίθεται ότι η πρώτη παρένθεση είναι παρονομαστής, ενώ η δεύτερη παρένθεση είναι η συζυγής.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Π1. Δείτε τις παρακάτω απλοποιήσεις:

a. $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|,\ x\in\mathbb{R}$ b. $\sqrt[4]{(x+2)^4}=|x+2|,\ x\in\mathbb{R}$ c. $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$ γιατί πρέπει $(x-2)^3\ge 0\Rightarrow x\ge 2$

d. $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{\left(x-3\right)^2}=|x-3|$ e. $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7+4-4\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}=|\sqrt{7}-2|=\sqrt{7}-2$

Π2. Δείτε πως «διώχνουμε» τα ριζικά από τους παρονομαστές:

$$\frac{3}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}=\frac{3\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{11-5}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{(x+1)\cdot(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}=\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}$$

Π3. Να γράψετε σαν μία ρίζα τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\sqrt[4]{\alpha^3}\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}\cdot\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{3}{4}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{23}{12}}=\alpha\cdot\alpha^{\frac{11}{12}}=\alpha\cdot\sqrt[12]{\alpha^{11}}$

2. $\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta}\cdot\sqrt{\alpha\beta^3}=\alpha^{\frac{3}{6}}\cdot\beta^{\frac{2}{6}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\frac{3}{2}}=\alpha^{\frac{3}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\frac{2}{6}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}=\alpha^{\frac{5}{3}}\cdot\beta^{\frac{13}{6}}=\alpha\cdot\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\beta^2\cdot\beta^{\frac{1}{3}}=\alpha\cdot\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha\cdot\beta^2}$

Π4. Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση , αν γνωρίζετε ότι -1<x<2:

$A=\sqrt{4x^2+8x+4}-\sqrt{4-4x+x^2}=\sqrt{4\left(x^2+2x+1\right)}-\sqrt{(x-2)^2}=2|x+1|-|x-2|=2\left(x+1\right)+(x-2)=3x,$

αφού $-1<x<2,$ συνεπώς $x+1>0$ ενώ $x-2<0$.

Π5. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις: $\frac{2}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{5}+2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+2\right)-2\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}=\frac{8}{5-4}=8$

Π6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $\sqrt{4x^2-4x+1}=x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2}=x+1$. Πρέπει $x\geq -1$. Οπότε $|2x-1|=x+1 \Leftrightarrow 2x-1=x+1$ ή $2x-1=-x-1$ $\Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$, δεκτές.

2. $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2}=|x|+1$. Οπότε $|2x-1|=|x|+1$

Αν $x<0$, $-2x+1=-x+1 \Leftrightarrow x=0$, μη δεκτή.

Αν $0\leq x\leq \frac{1}{2}$, $-2x+1=x+1 \Leftrightarrow x=0$, δεκτή (τελικά!)

Αν $x>\frac{1}{2}$, $2x-1=x+1 \Leftrightarrow x=2$, δεκτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

1. $\sqrt{(-7)^2}=$ 2. $\sqrt[4]{(-3)^4}=$ 3. $\sqrt[3]{(x-1)^3}=$ $(x\geq 1)$ 4. $\sqrt{\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2}=$ $(a<b)$

5. $\sqrt{x^2-6x+9}=$ 6. $\sqrt[3]{a^7\cdot b^5}=$ $(a,b>0)$ 7. $\sqrt[4]{a^4\cdot b^8}=$ $(a,b\in\mathbb{R})$

Α2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με ρητούς παρονομαστές:

1. $\frac{3}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=$ 2. $\frac{3x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$ 3. $\frac{x^2+2x+1}{2-\sqrt{x^2+x+4}}=$

Α3. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

1. $\frac{1}{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}-\frac{1}{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}=$ 2. $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}+\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}=$

Α4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$ 2. $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=$ 3. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=$

Α5. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\beta^3}}{\sqrt[6]{\alpha^5}\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}=$ 2. $\sqrt[4]{\alpha\cdot\beta^3}\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta}\cdot\sqrt[6]{\alpha^5\cdot\beta}=$

Α6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=x-\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{9x^2-6x+1}=5$ 3. $\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{x^2-2x+1}$

4. $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=3$ 5. $\sqrt{x^2+6x+9}=2x-3$

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

37172. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ και $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$. (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. (Μονάδες 12)

34152. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$. (Μονάδες 10)

34155. Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$. (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β. (Μονάδες 10)

34157. Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$. (Μονάδες 13)

37193. Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

37194.α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6-\sqrt[3]{30}$. (Μονάδες 13)

37195. Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$. (Μονάδες 12)

37197. Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ (Μονάδες 12)

37198. Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$. (Μονάδες 12)

37199. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$. (Μονάδες 12)

12943. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα α + β και το γινόμενο αβ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$. (Μονάδες 13)

14774.α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}.$$ (Μονάδες 12)

14682. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{3}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A-B=18$. (Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3},\sqrt[3]{3}$. (Μονάδες 13)

14452. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$. (Μονάδες 1 5)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$. (Μονάδες 10)

14931. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha=1+\sqrt{2}$ και $\beta=1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\alpha^2-\beta^2$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $A=4\sqrt{2}$ και $B=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 10)

37192. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$, $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, $\sqrt{5} \cong 2{,}24$ και $\sqrt{7} \cong 2{,}64$.

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}$. (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)